

сборник геометрических задач №23 — 25

№23

- 1 а) Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 45° и 120° , а $CD = 40$.
- б) Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 30° и 120° , а $CD = 25$.
- 2 а) Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K . Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 5$, $CK = 14$.
- б) Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K . Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 12$, $CK = 16$.
- 3 а) Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 15 , а одна из диагоналей ромба равна 60 . Найдите углы ромба.
- б) Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 10 , а одна из диагоналей ромба равна 40 . Найдите углы ромба.
- 4 а) Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 8$ и $CH = 2$. Найдите высоту ромба.
- б) Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 21$ и $CH = 8$. Найдите высоту ромба.
- 5 а) Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 24$, $BF = 10$.
- б) Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 21$, $BF = 20$.
- 6 а) Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD , если $AB = 10$, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 12 и 5 .
- б) Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD , если $AB = 30$, $CD = 40$, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 20 .
- 7 а) Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 71° и 79° . Найдите BC , если радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 8 .
- б) Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 73° и 77° . Найдите BC , если радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 9 .
- 8 а) Точка H является основанием высоты BH , проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC . Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK , если $BH = 14$.
- б) Точка H является основанием высоты BH , проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC . Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK , если $BH = 13$.
- 9 а) Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке V . Найдите диаметр окружности, если $AB = 9$, $AC = 12$.
- б) Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке V . Найдите диаметр окружности, если $AB = 3$, $AC = 5$.
- 10 а) Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке V . Найдите AC , если диаметр окружности равен 16 , а $AB = 15$.
- б) Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке V . Найдите AC , если диаметр окружности равен 15 , а $AB = 4$.

- 11 а) Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C . Найдите длину отрезка KP , если $AK = 6$, а сторона AC в 1,5 раза больше стороны BC .
- б) Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C . Найдите длину отрезка KP , если $AP = 36$, а сторона BC в 1,8 раза меньше стороны AB .
- 12 а) Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M . Найдите MC , если $AB = 12$, $DC = 48$, $AC = 35$.
- б) Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M . Найдите MC , если $AB = 11$, $DC = 22$, $AC = 27$.
- 13 а) Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN , если $MN = 13$, $AC = 65$, $NC = 28$.
- б) Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN , если $MN = 14$, $AC = 21$, $NC = 10$.
- 14 а) Катеты прямоугольного треугольника равны 18 и 24. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.
- б) Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.
- 15 а) Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC . Найдите AB , если $AH = 6$, $AC = 24$.
- б) Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC . Найдите AB , если $AH = 7$, $AC = 28$.
- 16 а) Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF , если $AD = 25$, $BC = 15$, $CF : DF = 3 : 2$.
- б) Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF , если $AD = 44$, $BC = 24$, $CF : DF = 3 : 1$.

Ответы:

- | | | | | | |
|---|------------------------|-------------------------------|----------------------|---------------------|----------------------|
| 1. а) $20\sqrt{6}$. б) $25\sqrt{3}$. | 2. а) 48. б) 80. | 3. а, б) 60; 120; 60; 120. | 4. а) 6. б) 20. | 5. а) 26. б) 29. | 6. а) 24. б) 15. |
| 7. а) 8. б) 9. | 8. а) 14. б) 13. | 9. а) 5,25. б) 3,2. | 10. а) 25. б) 16. | 11. а) 4. б) 20. | 12. а) 28. б) 18. |
| 13. а) 7. б) 20. | 14. а) 14,4. б) 12. | 15. а) 12. б) 14. | 16. а) 21. б) 39. | | |

№24

- 1 а) Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AB и CD четырёхугольника пересекаются в точке M . Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.
- б) Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырёхугольника пересекаются в точке K . Докажите, что треугольники KAB и KCD подобны.
- 2 а) Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 6 и 24, $BD = 12$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.
- б) Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 5 и 45, $BD = 15$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

- 3 а) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы CDB и CAB равны. Докажите, что углы BCA и BDA также равны.
б) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы DAC и DBC равны. Докажите, что углы CDB и CAB также равны.
- 4 а) На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку E . Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади трапеции.
б) На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку K . Докажите, что сумма площадей треугольников BKC и AKD равна половине площади трапеции.
- 5 а) Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку E . Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади параллелограмма.
б) Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку F . Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна половине площади параллелограмма.
- 6 а) Точка E — середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции.
б) Точка K — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.
- 7 а) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 . Докажите, что углы BB_1A_1 и BA_1A_1 равны.
б) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Докажите, что углы AA_1C_1 и ACC_1 равны.
- 8 а) Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M , лежащей на стороне AD . Докажите, что M — середина AD .
б) Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке N , лежащей на стороне CD . Докажите, что N — середина CD .
- 9 а) В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O . Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.
б) В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке P . Докажите, что площади треугольников APB и CPD равны.
- 10 а) В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведены высоты AA_1 и BB_1 . Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.
б) В треугольнике ABC с тупым углом ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Докажите, что треугольники A_1BC_1 и ABC подобны.
- 11 а) Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках P и Q соответственно. Докажите, что отрезки BP и DQ равны.
б) Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках K и M соответственно. Докажите, что отрезки BK и DM равны.
- 12 а) Биссектрисы углов B и C трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O , лежащей на стороне AD . Докажите, что точка O равноудалена от прямых AB , BC и CD .
б) Биссектрисы углов C и D трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P , лежащей на стороне AB . Докажите, что точка P равноудалена от прямых BC , CD и AD .

- 13 а) Окружности с центрами в точках I и J пересекаются в точках A и B , причём точки I и J лежат по одну сторону от прямой AB . Докажите, что прямые AB и IJ перпендикулярны.
- б) Окружности с центрами в точках E и F пересекаются в точках C и D , причём точки E и F лежат по одну сторону от прямой CD . Докажите, что прямые CD и EF перпендикулярны.
- 14 а) Окружности с центрами в точках I и J не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $m : n$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $m : n$.
- б) Окружности с центрами в точках P и Q не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $a : b$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $a : b$.
- 15 а) Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB . Точка K — середина стороны BC . Докажите, что AK — биссектриса угла BAD .
- б) Сторона AB параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AD . Точка L — середина стороны AB . Докажите, что DL — биссектриса угла ADC .

№25

- 1 а) В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 120, а площадь равна 540, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.
- б) В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 200, а площадь равна 1500, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.
- 2 а) В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC . Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E . Найдите расстояние от точки E до прямой CD , если $AD = 14$, $BC = 12$.
- б) В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC . Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E . Найдите расстояние от точки E до прямой CD , если $AD = 14$, $BC = 7$.
- 3 а) Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 40 и 41, а основание BC равно 16. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB . Найдите площадь трапеции.
- б) Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 24 и 25, а основание BC равно 9. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB . Найдите площадь трапеции.
- 4 а) В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 12. Найдите стороны треугольника ABC .
- б) В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 44. Найдите стороны треугольника ABC .
- 5 а) На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 49$, $MD = 42$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .
- б) На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 9$, $MD = 6$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .
- 6 а) Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 4 и 15 от вершины A . Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB , если косинус угла BAC равен $\sqrt{15}/4$.

- 6 б) Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 12 и 21 от вершины A . Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB , если косинус угла BAC равен $\sqrt{7}/4$.
- 7 а) В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 84$, $AC = 98$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .
- б) В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 40$, $AC = 64$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .
- 8 а) Окружности радиусов 25 и 100 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D — на второй. При этом AC и BD — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD .
- б) Окружности радиусов 45 и 55 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D — на второй. При этом AC и BD — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD .
- 9 а) Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 25$ и $CD = 16$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K , причём угол $AKB = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.
- б) Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$ и $CD = 17$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K , причём угол $AKB = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.
- 10 а) В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC . Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC . Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны 5, 4 и 3. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.
- б) В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC . Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC . Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны 13, 6 и 5. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.
- 11 а) Углы при одном из оснований трапеции равны 77° и 13° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 11 и 10. Найдите основания трапеции.
- б) Углы при одном из оснований трапеции равны 47° и 43° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 16 и 14. Найдите основания трапеции.
- 12 а) Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD , если $BC = 10$, а углы B и C четырёхугольника равны соответственно 112° и 113° .
- б) Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD , если $BC = 12$, а углы B и C четырёхугольника равны соответственно 115° и 95° .
- 13 а) В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B , в отношении 5:3, считая от точки B . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $BC = 8$.
- б) В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B , в отношении 5:4, считая от точки B . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $BC = 18$.
- 14 а) В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 49 и 21, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD , если $AB = 20$.
- б) В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 18 и 6, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD , если $AB = 10$.

- 15 а) Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K .
Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 19$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 7 .
- б) Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K .
Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 11$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 3 .

Ответы:

- | | | | | | |
|---------------------|--|---|--|------------------------------|---|
| 1. а) 1,8. б) 3. | 2. а) $2\sqrt{42}$. б) $7\sqrt{2}$. | 3. а) 820. б) 300. | 4. а) $3\sqrt{13}$; $6\sqrt{13}$; $9\sqrt{5}$. б) $11\sqrt{13}$; $22\sqrt{13}$; $33\sqrt{5}$. | 5. а) 13. б) 5. | 6. а) 8. б) 8. |
| 7. а) 26. б) 39. | 8. а) 80. б) 99. | 9. а) $\sqrt{427}$. б) $\sqrt{133}$. | 10. а) 168. б) 1320. | 11. а) 21 и 1. б) 30 и 2. | 12. а) $10\sqrt{2}$. б) $8\sqrt{3}$. |
| 13. а) 5. б) 15. | 14. а) 25. б) 10. | 15. а) 266. б) 66. | | | |

для заметок

