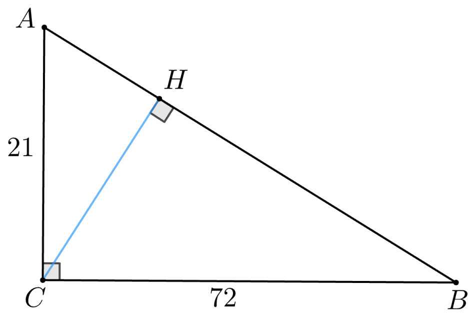
Сборник задач №23

Задание 1.

Катеты прямоугольного треугольника равны 21 и 72. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.

Решение



Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный, $AC = 21, BC = 72$.

Найти: CH.

Решение:
Введем обозначения, как показано на рисунке. CH – высота. По теореме Пифагора найдем гипотенузу AB:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{21^2 + 72^2} = \sqrt{5625} = 75,$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot AB \Leftrightarrow CH = \frac{AC \cdot BC}{AB},$$

$$CH = \frac{21 \cdot 72}{75} = 20,16.$$

ОТВЕТ: $20,16$.

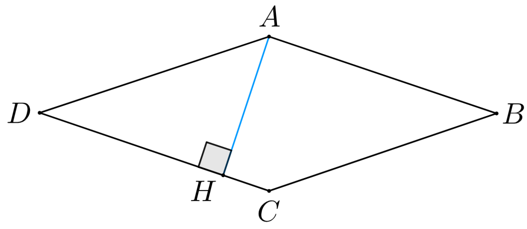
Задание 2.

Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 21$ и $CH = 8$. Найдите высоту ромба.

Решение

Дано: $ABCD$ – ромб, AH – высота, $DH = 21$, $CH = 8$.

Найти: AH.



Решение:

1) Найдём CD:

$$CD = DH + CH = 21 + 8 = 29.$$

2) Так как стороны ромба равны, то: $AD = CD = 29$.

3) Рассмотрим $\triangle AHD$. Он является прямоугольным, так как AH – высота. По теореме Пифагора:

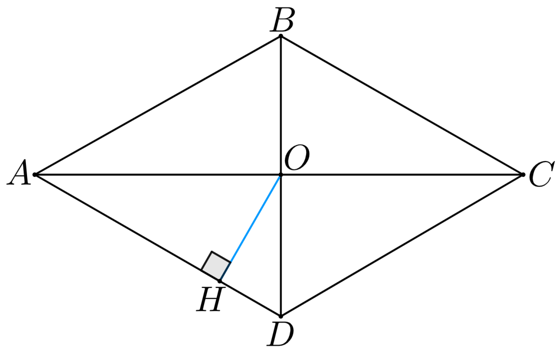
$$AH^2 = AD^2 - DH^2 \Rightarrow AH^2 = 29^2 - 21^2 = 841 - 441 = 400 \Rightarrow AH = \sqrt{400} = 20.$$

ОТВЕТ: 20.

Задание 3.

Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 10, а одна из диагоналей ромба равна 40. Найдите углы ромба.

Решение



Дано: $ABCD$ – ромб, $AC \cap BD = O$, $OH \perp AD$, $OH = 10$, $AC = 40$.

Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$.

Решение:
$AO = CO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{40}{2} = 20$ (диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам).

$\angle AHO = 90°$, так как OH – расстояние $\Rightarrow \triangle AHO$ – прямоугольный.

$$OH = \frac{AO}{2} = \frac{20}{2} = 10 \Rightarrow \angle HAO = 30°,$$

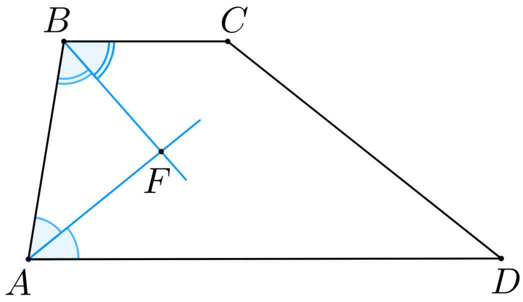
как угол, лежащий напротив катета, равного половине гипотенузы.
$\angle HAO = \angle BAO = 30°$ (диагонали ромба делят его углы пополам) $\Rightarrow \angle A = 60°$.
$\angle C = \angle A = 60°, \angle D = 180° - \angle A = 180° - 60° = 120° \Rightarrow \angle B = 120°$ по свойствам ромба.

ОТВЕТ: $\angle A = 60°, \angle B = 120°, \angle C = 60°, \angle D = 120°$.

Задание 4.

Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F. Найдите AB, если $AF = 16$, $BF = 12$.

Решение



Дано: $ABCD$ – трапеция, AF, BF – биссектрисы, $AF = 16$, $BF = 12$.

Найти: AB.

Решение:
$\angle BAD + \angle ABC = 180°$. как углы при боковой стороне трапеции.
Так как AF – биссектриса: $\angle BAD = 2 \cdot \angle BAF$.
Так как BF – биссектриса: $\angle ABC = 2 \cdot \angle ABF$.
Подставим выражения для углов:

$$2 \cdot \angle BAF + 2 \cdot \angle ABF = 180° \Leftrightarrow \angle BAF + \angle ABF = 90°.$$

По теореме о сумме углов треугольника:

$$\angle BFA = 180° - (\angle BAF + \angle ABF) = 180° - 90° = 90°.$$

Таким образом, $\triangle ABF$ – прямоугольный. По теореме Пифагора:

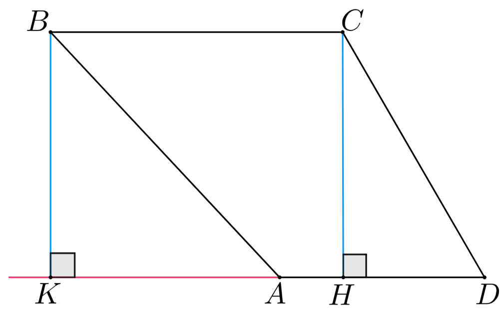
$$AB^2 = AF^2 + BF^2 \Leftrightarrow AB^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400 \Rightarrow AB = \sqrt{400} = 20.$$

ОТВЕТ: 20.

Задание 5.

Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно $60°$ и $150°$, а $CD = 33$.

Решение



Дано: $ABCD$ – трапеция, $\angle ABC = 60°$, $\angle BCD = 150°$, $CD = 33$.

Найти: AB.

Решение:
Введем обозначения, как показано на рисунке. Проведем высоты CH и BK. В трапеции сумма смежных углов при боковой стороне равна $180°$, поэтому

$$\angle ADC = 180° - \angle BCD = 180° - 150° = 30°.$$

Из прямоугольного $\triangle CHD$ найдем сторону CH:

$$CH = CD \sin \angle ADC = 33 \cdot \frac{1}{2} = 16,5.$$

Углы ABC и BAK равны как накрест лежащие углы при параллельных прямых. Высоты CH и BK равны. Из прямоугольного $\triangle ABK$ найдем AB:

$$AB = \frac{BK}{\sin \angle BAK} = \frac{16,5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{33}{\sqrt{3}} = \frac{33\sqrt{3}}{3} = 11\sqrt{3}.$$

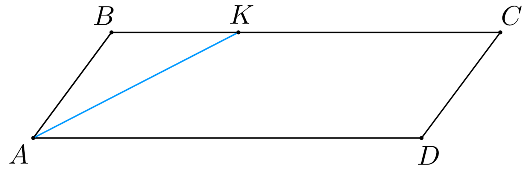
ОТВЕТ: $11\sqrt{3}$.

Задание 6.

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 6, CK = 10$.

Решение

Дано: $ABCD$ – параллелограмм, AK – биссектриса, $BK = 6$, $CK = 10$.



Найти: P_{ABCD}.

Решение:
Так как AK – биссектриса. $\angle BAK = \angle KAD$.
$\angle BKA = \angle KAD$, как накрест лежащие углы при $BC \parallel AD$ (противолежащие стороны параллелограмма) и секущей AK.
Значит, $\angle BKA = \angle BAK \Rightarrow \triangle ABK$ – равнобедренный по признаку $\Rightarrow AB = BK = 6$.
Найдём длину стороны BC:

$$BC = BK + CK = 6 + 10 = 16.$$

Так как противоположные стороны параллелограмма равны:

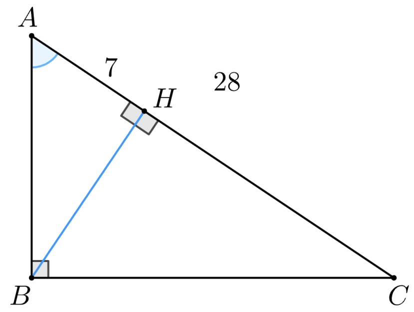
$$P = 2 \cdot (AB + BC) = 2 \cdot (6 + 16) \Rightarrow P = 2 \cdot 22 = 44.$$

ОТВЕТ: 44.

Задание 7.

Точка H является основанием высоты, проведенной из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если $AH = 7, AC = 28$.

Решение



Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный, BH – высота,
$AH = 7, AC = 28.$

Найти: $AB.$

Решение:
$1)\ \angle AHB = \angle ABC = 90^\circ,$
$2)\ \angle A$ – общий.

Значит, $\triangle AHB \sim \triangle ABC$ по двум углам:

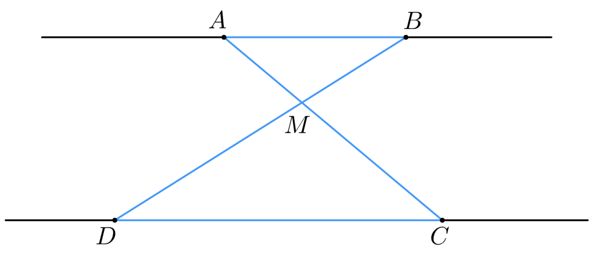
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB}; \quad \frac{x}{28} = \frac{7}{x} \Leftrightarrow x \cdot x = 28 \cdot 7 \Leftrightarrow x \cdot x = 196 \Leftrightarrow x = 14.$$

ОТВЕТ: $14.$

Задание 8.

Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если $AB = 16$, $DC = 24$, $AC = 25$.

Решение



Дано: Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, $AC \cap BD = M$, $AB = 16$, $DC = 24$, $AC = 25$.

Найти: MC.

Решение:
$\angle DCM = \angle BAM$ как накрест лежащие при $AB \parallel DC$ и секущей AC, $\angle DMC = \angle BMA$ как вертикальные, следовательно, $\triangle DMC \sim \triangle BMA$ по двум углам. Значит,

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{CD} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$AC = AM + MC = \frac{2}{3}MC + MC = \frac{5}{3}MC.$$

Найдем MC:

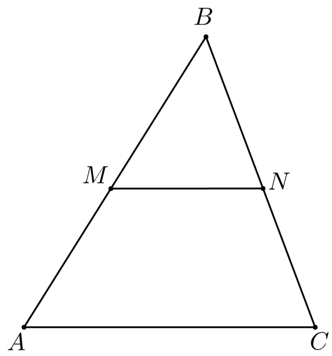
$$MC = \frac{AC}{5} \cdot 3 = \frac{25}{5} \cdot 3 = 15.$$

ОТВЕТ: 15.

Задание 9.

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если $MN = 12$, $AC = 42$, $NC = 25$.

Решение



Дано: $\triangle ABC$, $M \in AB$, $N \in BC$, $MN \parallel AC$, $MN = 12$, $AC = 42$, $NC = 25$.

Найти: BN.

Решение:
Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle BMN$:
$\angle BMN = \angle BAC$ как соответственные при $MN \parallel AC$ и секущей AB,
$\angle B$ – общий,
Значит, $\triangle ABC \sim \triangle BMN$:

$$\frac{BC}{BN} = \frac{AB}{BM} = \frac{AC}{MN}.$$

Найдем BN:

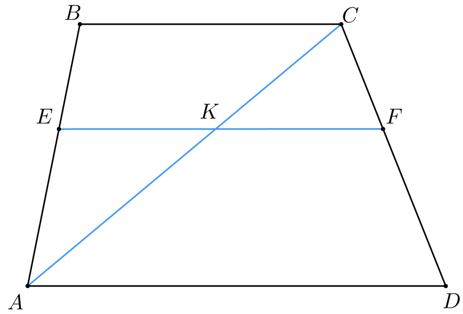
$$\frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN} \Leftrightarrow \frac{BN + NC}{BN} = \frac{42}{12} \Leftrightarrow 7BN = 2BN + 50 \Leftrightarrow BN = 10.$$

ОТВЕТ: 10.

Задание 10.

Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает ее боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если $AD = 44$, $BC = 24$, $\frac{CF}{DF} = \frac{3}{1}$.

Решение



Дано: $ABCD$ – трапеция, $E \in AB$, $F \in CD$, $EF \parallel AD$, $AD = 44$, $BC = 24$, $\frac{CF}{DF} = \frac{3}{1}$.

Найти: EF.

Решение:
Проведем построения и введем обозначения, как показано на рисунке.
Рассмотрим $\triangle KFC$ и $\triangle ACD$:
$\angle C$ – общий, $\angle CAD = \angle CKF$ как соответственные углы при $EF \parallel AD$ и секущей AC.
Значит, $\triangle KFC \sim \triangle ACD$:

$$\frac{KF}{AD} = \frac{CF}{CD} = \frac{CF}{CF + DF} = \frac{3}{4} \Rightarrow KF = \frac{3}{4} \cdot 44 = 33.$$

Аналогично, из $\triangle EKA$ и $\triangle ABC$ получаем, что

$$EK = BC \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6.$$

Таким образом,

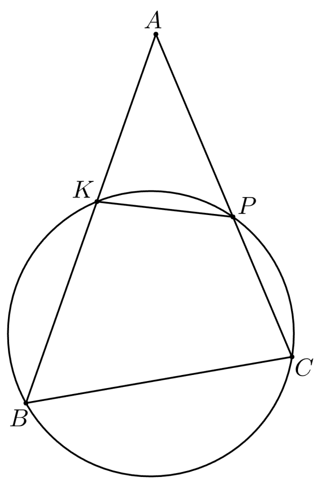
$$EF = EK + KF = 6 + 33 = 39.$$

ОТВЕТ: 39.

Задание 11.

Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AP = 9$, а сторона BC в 3 раза меньше стороны AB.

Решение



Дано: $\triangle ABC$, Окружность пересекает стороны AB и AC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C, $AP = 9$, $3BC = AB$.

Найти: KP.

Решение:
Поскольку четырехугольник $KPCB$ вписан в окружность, сумма противоположных углов равна $180°$, следовательно, $\angle KBC + \angle KPC = 180°$. Углы APK и KPC – смежные, следовательно, $\angle APK + \angle KPC = 180°$. Из приведенных равенств, получаем, что $\angle KBC = \angle APK$. Рассмотрим треугольники ABC и AKP, угол A – общий, углы APK и KBC равны, следовательно, треугольники подобны, откуда $\dfrac{KP}{BC} = \dfrac{AK}{AC} = \dfrac{AP}{AB}$.

Используя равенство $\dfrac{KP}{BC} = \dfrac{AP}{AB}$, найдем KP:

$$\frac{KP}{BC} = \frac{AP}{3BC} \Leftrightarrow KP = \frac{AP}{3} \Leftrightarrow KP = 3.$$

ОТВЕТ: 3.

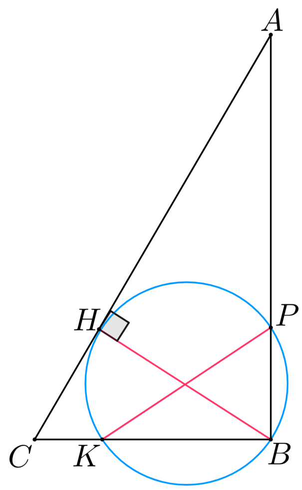
Задание 12.

Точка H является основанием высоты BH, проведенной из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK, если $BH = 11$.

Решение

Дано: $\triangle ABC$, $\angle B = 90^\circ$, BH – высота, окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно, $BH = 11$.

Найти: PK.



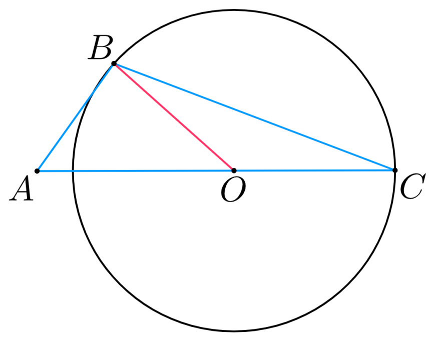
Решение:
Угол PBK – вписанный, он равен 90° и опирается на дугу KHP, следовательно, дуга KHP равна 180°, значит, хорда PK – диаметр окружности и $PK = 11$.

ОТВЕТ: 11.

Задание 13.

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если $AB = 1$, $AC = 5$.

Решение



Дано: Окружность с центром в точке $O \in AC$ в $\triangle ABC$ проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B, $AB = 1$, $AC = 5$.

Найти: диаметр окружности.

Решение:
Проведем радиус OB. Пусть R – длина радиуса окружности. Заметим, что $AO = AC - OC = AC - R$. Поскольку OB – радиус, проведенный в точку касания, то $OB \perp AB$, рассмотрим прямоугольный $\triangle AOB$. По теореме Пифагора:

$$AO^2 = AB^2 + OB^2 \Leftrightarrow (AC - R)^2 = AB^2 + R^2.$$

Раскрываем скобки по формуле сокращенного умножения:

$$AC^2 - 2AC \cdot R + R^2 = AB^2 + R^2.$$

Упрощаем выражение:

$$R = \frac{AC^2 - AB^2}{2AC} = \frac{5^2 - 1^2}{2 \cdot 5} = \frac{25 - 1}{10} = \frac{24}{10} = 2,4.$$

Таким образом, диаметр окружности равен:

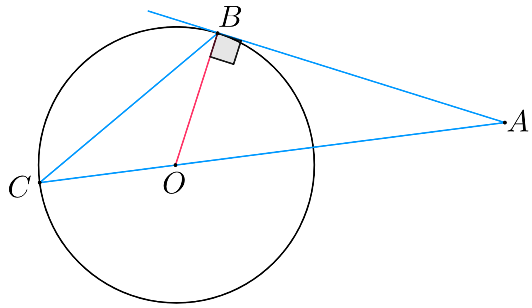
$$D = 2R = 2 \cdot 2,4 = 4,8.$$

ОТВЕТ: $4,8$.

Задание 14.

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если диаметр окружности равен 8, а $AB = 3$.

Решение



Дано: $\triangle ABC$, окружность с центром в $O \in AC$ проходит через т. C и касается AB в т.B, диаметр окружности $= 8$, $AB = 3$.

Найти: AC.

Решение:
Пусть O – центр окружности. Радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной. Поэтому $\triangle OBA$ – прямоугольный. Найдем BO:

$$BO = CO = \frac{D}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Найдем OA по теореме Пифагора:

$$OA = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Следовательно, длина стороны AC равна $AC = CO + OA = 4 + 5 = 9$.

ОТВЕТ: 9.

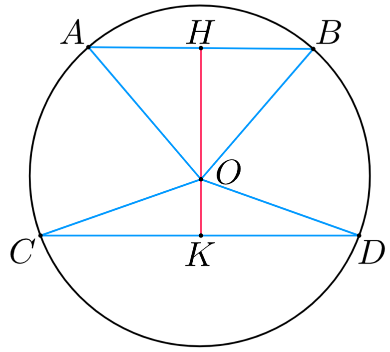
Задание 15.

Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD, если $AB = 18$, $CD = 24$, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 12.

Решение

Дано: AB и CD – хорды окружности, $AB = 18$, $CD = 24, OH = 12$.

Найти: OK.



Решение:
Проведем построения и введем обозначения, как показано на рисунке.
Рассмотрим треугольники $\triangle AOH$ и $\triangle BOH$, они прямоугольные, стороны AO и OB равны как радиусы окружности, OH – общая, следовательно, $\triangle AOH = \triangle HOB$, тогда:

$$AH = BH = \frac{AB}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

Аналогично, равны $\triangle COK = \triangle KOD$, тогда

$$CK = KD = \frac{CD}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

Рассмотрим $\triangle BOH$, найдем OB по теореме Пифагора:

$$OB = \sqrt{OH^2 + BH^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15.$$

Рассмотрим $\triangle OKD$, он прямоугольный, из теоремы Пифагора найдем OK:

$$OK = \sqrt{OD^2 - KD^2} = \sqrt{OB^2 - KD^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9.$$

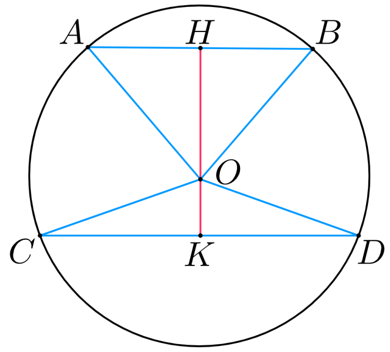
Таким образом, расстояние от центра окружности до хорды CD равно 9.

ОТВЕТ: 9.

Задание 16.

Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD, если $AB = 20$, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 24 и 10.

Решение



Дано: окружность с центром O, хорды AB и CD, $AB = 20$, $OH = 24$, $OK = 10$.

Найти: CD.

Решение:
Проведем построения и введем обозначения, как показано на рисунке.
Рассмотрим $\triangle AOH$ и $\triangle BOH$: они прямоугольные, стороны AO и OB равны как радиусы окружности, OH – общая сторона, следовательно, $\triangle AOH = \triangle HOB$. Тогда

$$AH = BH = \frac{AB}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

Аналогично, $\triangle COK = \triangle KOD \Rightarrow CK = KD$. Рассмотрим $\triangle BOH$. По теореме Пифагора:

$$OB = \sqrt{OH^2 + BH^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{576 + 100} = \sqrt{676} = 26.$$

Рассмотрим $\triangle OKD$, он прямоугольный, по теореме Пифагора найдем KD:

$$KD = \sqrt{OD^2 - OK^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24.$$

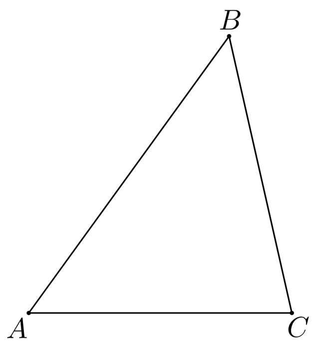
Таким образом, $CD = 2KD = 2 \cdot 24 = 48$.

ОТВЕТ: 48.

Задание 17.

Углы B и C треугольника ABC равны соответственно $62°$ и $88°$. Найдите BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 12.

Решение



Дано: $\triangle ABC, \angle B = 62°, \angle C = 88°$, радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$, равен 12.

Найти: BC.

Решение:
Сумма углов треугольника равна $180°$, поэтому:

$$\angle A = 180° - 62° - 88° = 30°.$$

По теореме синусов:

$$2R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}.$$

Подставим известные значения:

$$BC = 2R \cdot \sin A = 2 \cdot 12 \cdot \sin 30° = 24 \cdot \frac{1}{2} = 12.$$

ОТВЕТ: 12.