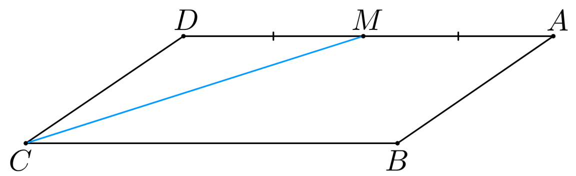
Сборник задач №24

Задание 1.

Сторона AD параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны CD. Точка M – середина стороны AD. Докажите, что CM – биссектриса угла BCD.

Решение



Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $AD = 2CD$,
M – середина AD.

Доказать: CM – биссектриса $\angle BCD$.

Доказательство:
Пусть M – середина AD, тогда

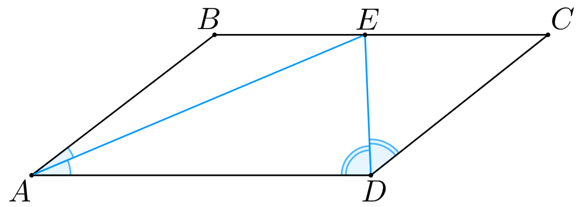
$$AM = MD = \frac{AD}{2} = \frac{2CD}{2} = CD.$$

Так как $CD = DM$, $\triangle DCM$ – равнобедренный $\Rightarrow \angle DCM = \angle DMC$ (по свойству равнобедренного треугольника).
$\angle DMC = \angle MCB$ (как накрест лежащие углы при $AD \parallel BC$ и секущей CM).
Значит, $\angle DCM = \angle MCB \Rightarrow CM$ – биссектриса $\angle BCD$. Что и требовалось доказать.

Задание 2.

Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке E стороны BC. Докажите, что E – середина BC.

Решение



Дано: $ABCD$ – параллелограмм, AE и DE – – биссектрисы.

Доказать: E – середина BC.

Доказательство:
$BC \parallel AD$ как противолежащие стороны параллелограмма.
Рассмотрим $\triangle ABE$:
1) $\angle BAE = \angle EAD$ (так как AE – биссектриса),
2) $\angle BEA = \angle EAD$ (как накрест лежащие углы при $BC \parallel AD$ и секущей AE).
Значит, $\angle BAE = \angle BEA \Rightarrow \triangle ABE$ – равнобедренный (по признаку) $\Rightarrow AB = BE$.

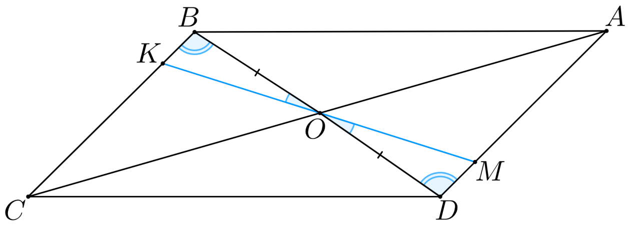
Рассмотрим $\triangle CDE$:
1) $\angle CDE = \angle EDA$ (так как DE – биссектриса),
2) $\angle DEC = \angle EDA$ (как накрест лежащие углы при $BC \parallel AD$ и секущей DE).
Значит, $\angle CDE = \angle DEC \Rightarrow \triangle CDE$ – равнобедренный (по признаку) $\Rightarrow CD = CE$.

Так как $AB = CD$ (по свойству параллелограмма), то $AB = CD = BE = CE \Rightarrow BE = CE \Rightarrow$ $\Rightarrow E$ – середина BC. Что и требовалось доказать.

Задание 3.

Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках K и M соответственно. Докажите, что отрезки BK и DM равны.

Решение



Дано: $ABCD$ – параллелограмм, т.O – точка пересечения диагоналей, $K \in BC, M \in AD$, KM проходит через т.O.

Доказать: $BK = DM$.

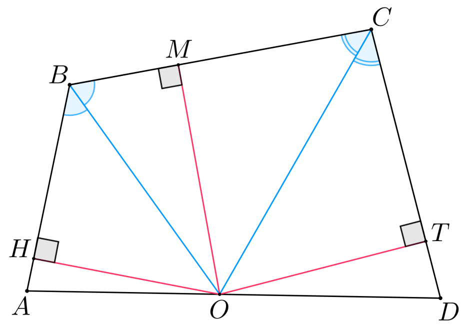
Доказательство:
Рассмотрим $\triangle KOB$ и $\triangle DOM$.
В них $BO = DO$, т. к. диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, $\angle KBO = \angle MDO$ – как накрест лежащие при параллельных прямых $BC \parallel AD$ и секущей BD, $\angle KOB = \angle DOM$ – как вертикальные.

Значит, $\triangle KOB = \triangle DOM$ по стороне и двум прилежащим к ней углам. Отсюда следует равенство соответствующих сторон $BK = DM$. Что и требовалось доказать.

Задание 4.

Биссектрисы углов B и C четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, лежащей на стороне AD. Докажите, что точка O равноудалена от прямых AB, BC и CD.

Решение



Дано: $ABCD$ – четырехугольник, BO и CO – – биссектрисы, $BO \cap CO = O$, $O \in AD$

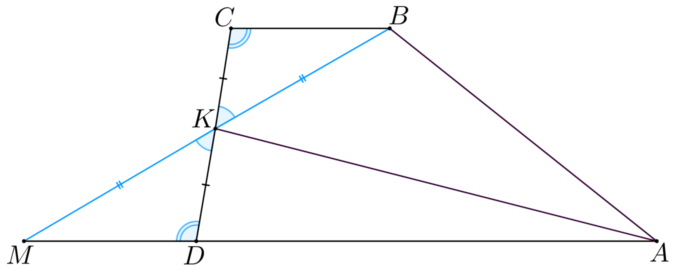
Доказать: O равноудалена от AB, BC, CD.

Доказательство:
Построим OH, OM и OT – перпендикуляры к сторонам AB, BC и CD.
Рассмотрим $\triangle OHB$ и $\triangle OMB$ (прямоугольные):
$\angle OBH = \angle OBM$ (так как BO – биссектриса)
BO – общая.
Значит, $\triangle OHB = \triangle OMB$ (по гипотенузе и острому углу) $\Rightarrow OH = OM$.
Аналогично прямоугольные $\triangle OMC$ и $\triangle OTC$ равны (по гипотенузе и острому углу) $\Rightarrow$
$\Rightarrow OM = OT$.
Значит, $OH = OM = OT \Rightarrow O$ – равноудалена от AB, BC, CD. Что и требовалось доказать.

Задание 5.

Точка K – середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

Решение



Дано: $ABCD$ – трапеция, K – середина CD.

Доказать: $S_{KAB} = \dfrac{1}{2} S_{ABCD}$.

Доказательство:
Продолжим BK и AD до пересечения в точке M.
Рассмотрим $\triangle KCB$ и $\triangle KDM$:
1) $\angle MKD = \angle BKC$ (как вертикальные углы),
2) $\angle BCK = \angle MDA$ (как накрест лежащие углы при $BC \parallel MD$ и секущей CD),
3) $CK = KD$ (так как K – середина CD).
Значит, $\triangle KCB = \triangle KDM$ (по стороне и прилежащим к ней углам) $\Rightarrow S_{KCB} = S_{KDM} \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{BMA}$.

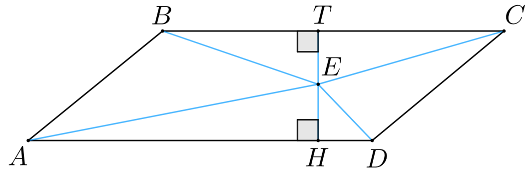
Из равенства треугольников следует, что $KM = KB$ (как соответственные элементы в равных треугольниках), значит, AK – медиана $\triangle BMA$.

По свойству медианы $S_{KAB} = S_{KMA} = \dfrac{1}{2} S_{BMA} = \dfrac{1}{2} S_{ABCD}$. ч.т.д.

Задание 6.

Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади параллелограмма.

Решение



Дано: $ABCD$ — параллелограмм, E — произвольная точка внутри параллелограмма.

Доказать: $S_{\triangle BEC} + S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD}$.

Доказательство:
Построим TH — высоту, проходящую через точку E, тогда $TH = TE + EH$.
$AD = BC$ (как противоположные стороны параллелограмма). Выразим площадь параллелограмма:

$$S_{ABCD} = AD \cdot TH.$$

Выразим площади треугольников:

$$S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot TE = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot TE.$$

$$S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot EH.$$

Суммируем площади треугольников:

$$S_{\triangle BEC} + S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot TE + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot EH = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot (TE + EH).$$

Подставляем $TH = TE + EH$:

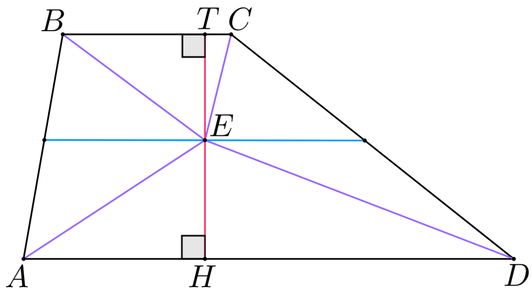
$$S_{\triangle BEC} + S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot TH = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD}.S_{\triangle BEC} + S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD}$$

Что и требовалось доказать.

Задание 7.

На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади трапеции.

Решение



Дано: $ABCD$ – трапеция, точка E – точка на средней линии.

Доказать: $S_{BEC} + S_{AED} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD}$.

Доказательство:
Построим TH – высоту, проходящую через точку E.
Так как средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и делит боковые стороны на равные отрезки, то по теореме Фалеса, $TE = HE = \frac{1}{2} \cdot TH$.

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot TH,$$

$$S_{BEC} = \frac{1}{2}BC \cdot TE = \frac{1}{2}BC \cdot \frac{1}{2}TH,$$

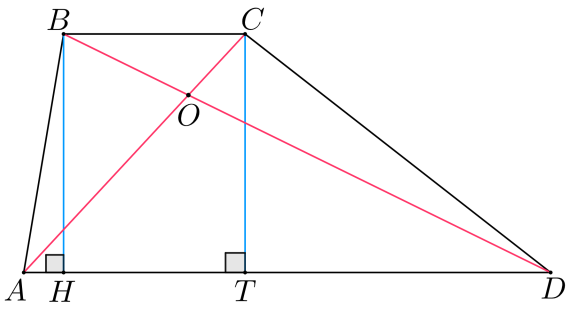
$$S_{AED} = \frac{1}{2}AD \cdot EH = \frac{1}{2}AD \cdot \frac{1}{2}TH.$$

$$S_{BEC} + S_{AED} = \frac{1}{2}BC \cdot \frac{1}{2}TH + \frac{1}{2}AD \cdot \frac{1}{2}TH = \frac{1}{2} \cdot TH \cdot \frac{BC + AD}{2} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD}.$$ ч.т.д.

Задание 8.

В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Решение



Дано: $ABCD$ – трапеция, O – точка пересечения диагоналей.

Доказать: $S_{AOB} = S_{COD}$.

Доказательство:
Построим высоты BH и CT, тогда $BH = CT$.

$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot CT \cdot AD,$

$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot CT \cdot AD.$

Значит, $S_{ABD} = S_{ACD}$.

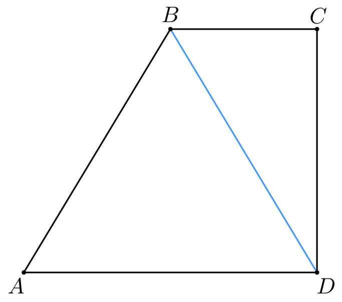
$$S_{ABD} = S_{AOB} + S_{AOD}, \quad S_{ACD} = S_{COD} + S_{AOD}.$$

Так как $S_{ABD} = S_{ACD}$, то $S_{AOB} + S_{AOD} = S_{COD} + S_{AOD} \Rightarrow S_{AOB} = S_{COD}$. Что и требовалось доказать.

Задание 9.

Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 5 и 45, $BD = 15$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Решение



Дано: $ABCD$ – трапеция, $BC = 5$, $AD = 45$, $BD = 15$.

Доказать: $\triangle CBD \sim \triangle ADB$.

Доказательство:
$\angle CBD = \angle BDA$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей BD. В $\triangle CBD$ и $\triangle ADB$ имеем:

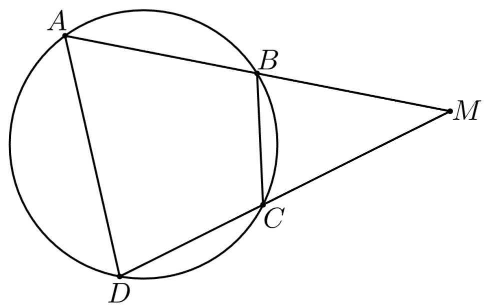
$$\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{AD}.$$

Следовательно, эти $\triangle CBD \sim \triangle ADB$ по двум парам пропорциональных сторон и углу между ними. Что и требовалось доказать.

Задание 10.

Известно, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AB и CD четырехугольника пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

Решение



Дано: $ABCD$ – четырехугольник, около $ABCD$ можно описать окружность, $AB \cap CD = M$.

Доказать: $\triangle MBC \sim \triangle MDA$.

Доказательство:
Пусть $\angle MBC = x°$, тогда по свойству смежных углов $\angle ABC = 180° - \angle MBC = 180°$ - $x°$.
По свойству вписанного четырехугольника

$$\angle ADC = 180° - \angle ABC = 180° - (180° - x°) =$$

$$= 180° - 180° + x° = x°.$$

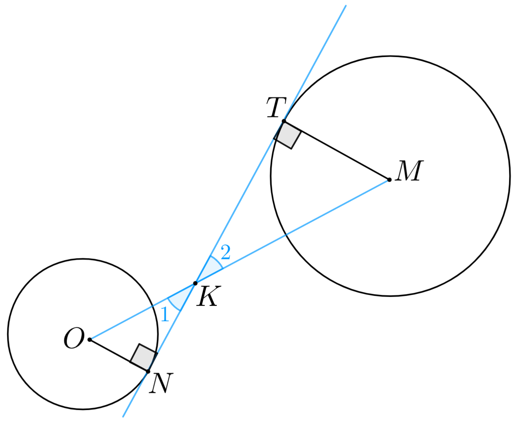
Рассмотрим $\triangle MBC$ и $\triangle MDA$:
1) $\angle MBC = \angle MDA = x°$,
2 $\angle M$ – общий.
Значит, $\triangle MBC \sim \triangle MDA$ по двум углам. Что и требовалось доказать.

Задание 11.

Окружности с центрами в точках O и M не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $m : n$. Докажите, что радиусы этих окружностей относятся как $m : n$.

Решение

Дано:
Окружности с центрами в точках O и M не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $m : n$.



Доказать:
радиусы этих окружностей относятся как $m : n$.

Доказательство:
Построим радиусы MT и ON в точки касания, тогда $\angle ONK = \angle MTK = 90^\circ$.

$\angle 1 = \angle 2$ (по свойству вертикальных углов). Значит, $\triangle ONK \sim \triangle MTK$ (по двум углам), следовательно:

$$\frac{ON}{TM} = \frac{OK}{KM} = \frac{m}{n}.$$

Таким образом, радиусы окружностей относятся как $m : n$. Что и требовалось доказать.

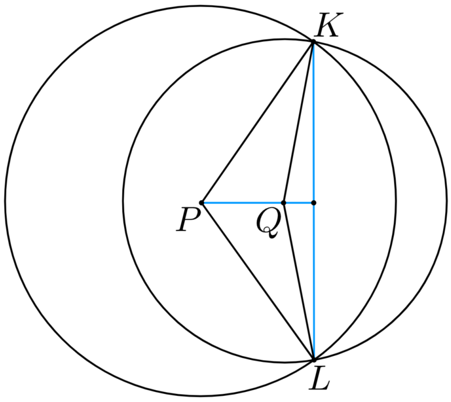
Задание 12.

Окружности с центрами в точках P и Q пересекаются в точках K и L, причем точки P и Q лежат по одну сторону от прямой KL. Докажите, что прямые PQ и KL перпендикулярны.

Решение

Дано: Окружности с центрами в точках P, Q, пересекаются в точках K, L.

Доказать: $PQ \perp KL$.

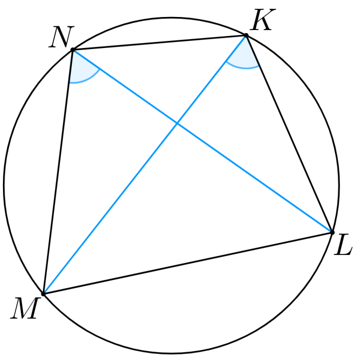


Доказательство:
Построим радиусы PK, PL, QK, QL.
$1)$ Радиусы одной окружности равны $PK = PL \Rightarrow P -$ равноудалена от концов KL.
$2)$ Радиусы другой окружности также равны $QK = QL \Rightarrow Q -$ равноудалена от концов KL.
Из 1 и 2 следует, что точки P и Q лежат на серединном перпендикуляре к KL.
Значит, $PQ \perp KL$. Что и требовалось доказать.

Задание 13.

В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ углы $\angle LKM$ и $\angle LNM$ равны. Докажите, что углы $\angle LNK$ и $\angle LMK$ также равны.

Решение



Дано: $KLMN$ – выпуклый четырехугольник,
$\angle LKM = \angle LNM$.

Доказать: $\angle LNK = \angle LMK$.

Доказательство:
Так как $KLMN$ – выпуклый четырехугольник (по условию) и $\angle LKM = \angle LNM$, то вокруг $KLMN$ можно описать окружность.

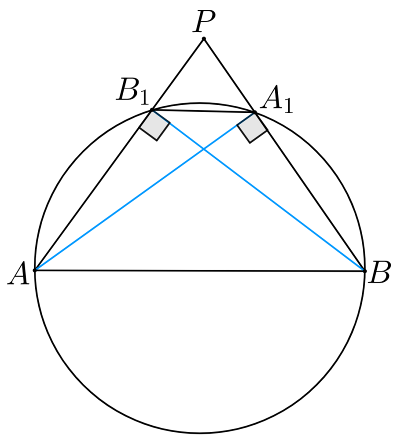
$$\angle LNK \text{ – вписанный, } \angle LNK = \frac{1}{2} \cdot \smile LK.$$
$$\angle LMK \text{ – вписанный, } \angle LMK = \frac{1}{2} \cdot \smile LK.$$

Значит, $\angle LNK = \angle LMK$. Что и требовалось доказать.

Задание 14.

В остроугольном треугольнике $\triangle ABP$ проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что углы BB_1A_1 и BAA_1 равны.

Решение



Дано: $\triangle ABP$, AA_1 и BB_1 — высоты.

Доказать: $\angle BB_1A_1 = \angle BAA_1$.

Доказательство:
Так как $\triangle AB_1B$ — прямоугольный (BB_1 — высота), то вокруг $\triangle AB_1B$ можно описать окружность с диаметром AB (радиус равен $\frac{1}{2} \cdot AB$).
Так как $\triangle AA_1B$ — прямоугольный (AA_1 — высота), то вокруг $\triangle AA_1B$ можно описать окружность с диаметром AB (радиус равен $\frac{1}{2} \cdot AB$).
Значит, точки A, B, A_1, B_1 лежат на одной окружности.

$$\angle BB_1A_1 \text{ — вписанный угол, } \angle BB_1A_1 = \frac{1}{2} \cdot \smile BA_1.$$
$$\angle BAA_1 \text{ — вписанный угол, } \angle BAA_1 = \frac{1}{2} \cdot \smile BA_1.$$

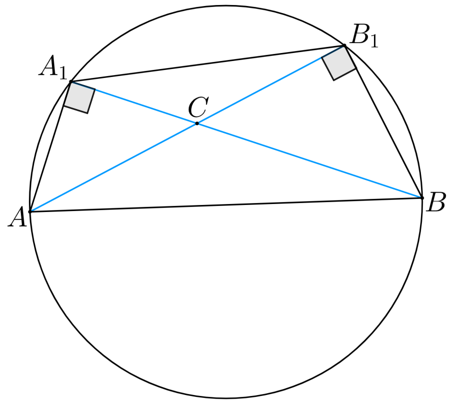
Следовательно, $\angle BB_1A_1 = \angle BAA_1$. Что и требовалось доказать.

Задание 15.

В треугольнике $\triangle ABC$ с тупым углом $\angle ACB$ проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что треугольники $\triangle A_1CB_1$ и $\triangle ACB$ подобны.

Решение

Дано: $\triangle ABC$ – тупоугольный, $\angle ACB$ – тупой, AA_1 и BB_1 – высоты.
Доказать: $\triangle A_1CB_1 \sim \triangle ACB$.



Доказательство:
Так как $\angle ACB$ – тупой, то основания высот A_1 и B_1 будут лежать на продолжениях сторон BC и AC соответственно.
Так как $\triangle AB_1B$ – прямоугольный (BB_1 – высота), то вокруг $\triangle AB_1B$ можно описать окружность с диаметром AB (радиус равен $0,5 \cdot AB$).
Так как $\triangle AA_1B$ – прямоугольный (AA_1 – высота), то вокруг $\triangle AA_1B$ можно описать окружность с диаметром AB (радиус равен $0,5 \cdot AB$).
Значит, точки A, B, B_1, A_1 лежат на одной окружности.

$$\angle AB_1A_1 \text{ – вписанный, } \angle AB_1A_1 = \frac{1}{2} \cdot \smile AA_1.$$

$$\angle ABA_1 \text{ – вписанный, } \angle ABA_1 = \frac{1}{2} \cdot \smile AA_1.$$

$$\angle A_1CB_1 = \angle ACB \text{ (как вертикальные углы).}$$

Значит, $\triangle A_1CB_1 \sim \triangle ACB$ (по двум углам). Что и требовалось доказать.