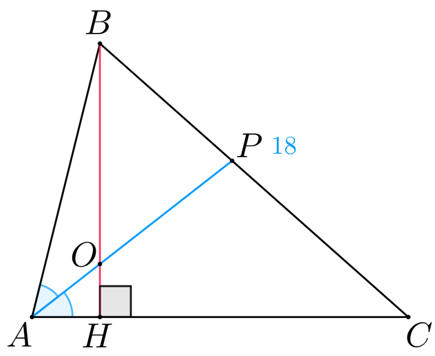
# Сборник задач №25

## Задание 1.

В треугольнике $ABC$ биссектриса угла $A$ делит высоту, проведённую из вершины $B$, в отношении $5:4$, считая от точки $B$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$, если $BC = 18$.

### Решение




**Дано:**
$\triangle ABC$, $AP$ – биссектриса, $BH$ – высота,
$AP \cap BH = O$, $BO : OH = 5 : 4$, $BC = 18$.

**Найти:** $R$.

**Решение:**
Введем обозначения, как показано на чертеже.
Так как $AP$ – биссектриса угла $A$, тогда по свойству биссектрисы $\triangle AHB$:

$$\frac{AB}{AH} = \frac{BO}{OH} = \frac{5}{4}.$$

$\triangle AHB$ – прямоугольный, так как $BH$ – высота, тогда

$$\cos \angle BAC = \frac{AH}{AB} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

По основному тригонометрическому тождеству:

$$\sin^2 \angle BAC + \cos^2 \angle BAC = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \angle BAC = 1 - \cos^2 \angle BAC = 1 - 0,8^2 = 1 - 0,64 = 0,36.$$

$\sin \angle BAC = 0,6$ (так как $\angle BAC$ – острый).
По теореме синусов в $\triangle ABC$:

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \sin \angle BAC} = \frac{18}{2 \cdot 0,6} = 15.$$

**ОТВЕТ:** 15.

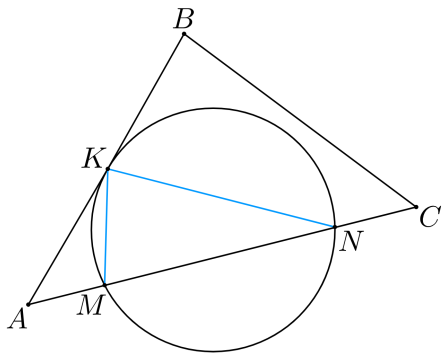
## Задание 2.

Точки $M$ и $N$ лежат на стороне $AC$ треугольника $ABC$ на расстояниях соответственно 9 и 35 от вершины $A$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки $M$ и $N$ и касающейся луча $AB$, если косинус угла $BAC$ равен $\frac{\sqrt{35}}{6}$.

## Решение

**Дано:** $\triangle ABC$, $AM=9$, $AN=35$, $\cos\angle BAC=\dfrac{\sqrt{35}}{6}$.
Окружность, проходящая через $M$ и $N$.

**Найти:** $R$.




**Решение:**
Пусть окружность касается луча $AB$ в точке $K$. Построим $KM$ и $KN$.
По теореме о касательной и секущей:

$$AK^2=AM\cdot AN=9\cdot 35=315\Rightarrow AK=\sqrt{315}.$$

В $\triangle MAK$ по теореме косинусов:

$$KM^2=AK^2+AM^2-2\cdot AK\cdot AM\cdot\cos\angle BAC\Rightarrow$$

$$\Rightarrow KM^2=\sqrt{315}^2+9^2-2\cdot\sqrt{315}\cdot 9\cdot\frac{\sqrt{35}}{6}=315+81-315=81\Rightarrow KM=9.$$

В $\triangle KAN$ по теореме косинусов:

$$KN^2=AK^2+AN^2-2\cdot AK\cdot AN\cdot\cos\angle BAC\Rightarrow$$

$$\Rightarrow KN^2=\sqrt{315}^2+35^2-2\cdot\sqrt{315}\cdot 35\cdot\frac{\sqrt{35}}{6}=315+1225-1225=315\Rightarrow KN=\sqrt{315}.$$

Т.к. $AK=KN=\sqrt{315}\Rightarrow\triangle KAN$ – равнобедренный:

$$\angle BAC=\angle KNA\Rightarrow\cos\angle BAC=\cos\angle KNA=\frac{\sqrt{35}}{6}.$$

По основному тригонометрическому тождеству:

$$\sin^2\angle KNA+\cos^2\angle KNA=1\Leftrightarrow\sin^2\angle KNA=1-\cos^2\angle KNA=$$

$$=1-\left(\frac{\sqrt{35}}{6}\right)^2=1-\frac{35}{36}=\frac{1}{36}.$$

$\sin\angle KNA=\dfrac{1}{6}$ (так как $\angle KNA$ – острый). По теореме синусов в $\triangle KNM$:

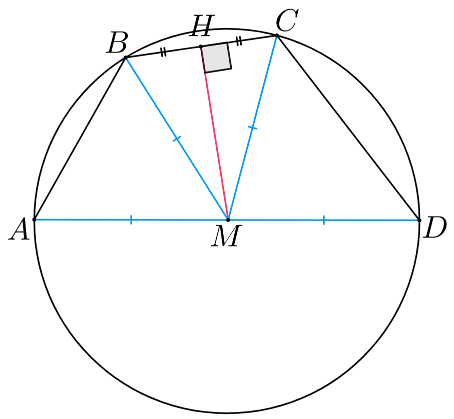
$$\frac{KM}{\sin\angle KNA}=2R\Rightarrow R=\frac{KM}{2\sin\angle KNA}=\frac{9}{2\cdot\frac{1}{6}}=27.$$

**ОТВЕТ:** $27$.

## Задание 3.

Середина $M$ стороны $AD$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите $AD$, если $BC = 14$, а углы $B$ и $C$ четырехугольника равны соответственно $110°$ и $100°$.

### Решение




**Дано:** $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, $M$ равноудалена от точек $A, B, C, D$. $BC = 14$, $\angle B = 110°$, $\angle C = 100°$.

**Найти:** $AD$.

**Решение:**
Так как точка $M$ равноудалена от точек $A, B, C, D$, то данные точки лежат на одной окружности с центром в точке $M \Rightarrow$ четырехугольник $ABCD$ – вписанный.
По свойству вписанного четырехугольника:

$$\angle CDM = 180° - \angle ABC = 180° - 110° = 70°.$$

Так как $CM = MD$, $\triangle CMD$ – равнобедренный $\Rightarrow \angle CDM = \angle MCD = 70°$.

$$\angle MCB = \angle C - \angle MCD = 100° - 70° = 30°.$$

Так как $CM = BM$, $\triangle BMC$ – равнобедренный.
Построим $MH$ – высоту $\triangle BMC$, тогда $MH$ – биссектриса и медиана (по свойству равнобедренного треугольника) $\Rightarrow BH = HC = BC : 2 = 14 : 2 = 7$.
В прямоугольном $\triangle MCH$:

$$\cos\angle MCH = \frac{HC}{CM} \Rightarrow CM = \frac{HC}{\cos\angle MCH} = \frac{7}{\cos 30°} = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{14\sqrt{3}}{3}.$$

$$AD = 2 \cdot CM = 2 \cdot \frac{14\sqrt{3}}{3} = \frac{28\sqrt{3}}{3}.$$

**ОТВЕТ:** $\frac{28\sqrt{3}}{3}$.

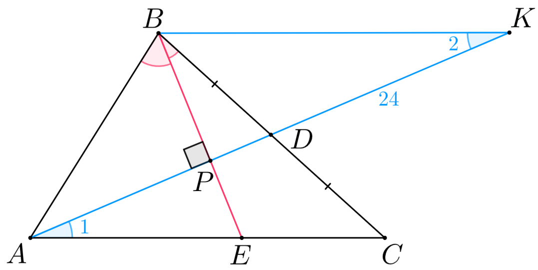
## Задание 4.

В треугольнике $ABC$ биссектриса $BE$ и медиана $AD$ перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную $24$. Найдите стороны треугольника $ABC$.

### Решение

**Дано:** $\triangle ABC$, $BE$ – биссектриса, $AD$ – медиана, $BE \perp AD$, $AD = BE = 24$.

**Найти:** $AB$, $BC$, $CA$.




**Решение:**

В $\triangle ABD$: $BP$ – биссектриса и высота, значит, $\triangle ABD$ – равнобедренный по признаку $\Rightarrow$

$$AP = PD = AD : 2 = 24 : 2 = 12 \text{ и } AB = BD = x.$$

Так как $AD$ – медиана, то $BD = DC = x$, $BC = x + x = 2x$.
Продлим $AD$ за точку $D$ и отметим на луче $AD$ точку $K$ так, что $AD = DK = 24$.
Рассмотрим $\triangle ADC$ и $\triangle BDK$:
$\angle BDK = \angle ADC$ (как вертикальные углы)
$BD = DC$, $\quad AD = DK$ (по построению)
Значит, $\triangle ADC = \triangle BDK$ (по двум сторонам и углу между ними). $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ и $AC = BK$ (как соответственные элементы в равных треугольниках).
Рассмотрим $\triangle APE$ и $\triangle PBK$: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle APE = \angle BRK$ (как вертикальные углы).
Значит, $\triangle APE \sim \triangle PBK$ (по двум углам):

$$\frac{PE}{BP} = \frac{AE}{BK} = \frac{AP}{PK} = \frac{12}{12+24} = \frac{1}{3}.$$

Пусть $BP = 3y$, $PE = y$, $BP + PE = BE$.

$$4y = 24 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow BP = 18,\ PE = 6.$$

Рассмотрим $\triangle APE$ – прямоугольный:

$$AE^2 = AP^2 + PE^2 = 12^2 + 6^2 = 144 + 36 = 180 \Rightarrow AE = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}.$$

$$BK = AC = 3 \cdot AE = 18\sqrt{5}.$$

Рассмотрим $\triangle BPD$ – прямоугольный:

$$BD^2 = BP^2 + PD^2 = 18^2 + 12^2 = 324 + 144 = 468 \Rightarrow BD = \sqrt{468} = 6\sqrt{13} \Rightarrow AB = 6\sqrt{13}.$$

$$BC = AB \cdot 2 = 12\sqrt{13}.$$

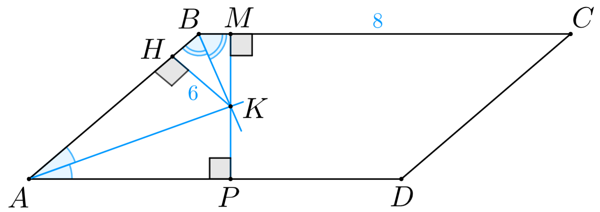
Таким образом, получаем: $AC = 18\sqrt{5}$, $AB = 6\sqrt{13}$, $BC = 12\sqrt{13}$.

**ОТВЕТ:** $18\sqrt{5}, 6\sqrt{13}, 12\sqrt{13}$.

## Задание 5.

Биссектрисы углов $A$ и $B$ параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке $K$. Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 8$, а расстояние от точки $K$ до стороны $AB$ равно $6$.

**Решение**




**Дано:** $ABCD$ – параллелограмм, $AK$ и $BK$ – биссектрисы, $BC = 8$, $KH = 6$.

**Найти:** $S_{ABCD}$.

**Решение:**
Построим $MP$ – высоту, проходящую через точку $K$, тогда $\angle KMB = 90°$, $\angle KPA = 90°$.
Построим $KH$ – перпендикуляр от точки $K$ до $AB$, $KH = 6$ и $\angle KHA = \angle KHB = 90°$.
Рассмотрим $\triangle KHA$ и $\triangle KPA$ – прямоугольные:
1) $\angle HAK = \angle PAK$, так как $AK$ – биссектриса;
2) $AK$ – общая;
Значит, $\triangle KHA = \triangle KPA$ (по гипотенузе и острому углу) $\Rightarrow KH = KP = 6$.

Рассмотрим $\triangle KHB$ и $\triangle KBM$ – прямоугольные:
1) $\angle HBK = \angle KBM$, так как $BK$ – биссектриса;
2) $BK$ – общая;
Значит, $\triangle KHB = \triangle KMB$ (по гипотенузе и острому углу) $\Rightarrow KH = KM = 6$.

$$MP = KM + KP = 6 + 6 = 12.$$

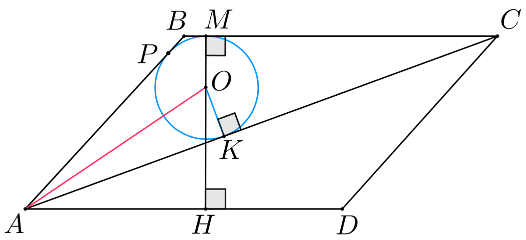
$$S = MP \cdot BC = 12 \cdot 8 = 96.$$

**ОТВЕТ:** $96$.

## Задание 6.

В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ $AC$. Точка $O$ является центром окружности, вписанной в треугольник $ABC$. Расстояния от точки $O$ до точки $A$ и прямых $AD$ и $AC$ соответственно равны $13$, $6$ и $5$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

## Решение




**Дано:** $ABCD$ – параллелограмм, $O$ – центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$, $AO = 13$, $OK = 5$, $OH = 6$.

**Найти:** $S_{ABCD}$.

**Решение:**
Пусть точки $P, M, K$ – точки касания окружности и сторон треугольника $AB$, $BC$ и $AC$ соответственно. Построим радиус $OK$, т.к. радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, то $OK$ – расстояние от точки $O$ до прямой $AC$, значит, $OK = 5$.
Построим $MH$ – высоту параллелограмма, проходящую через точку $O$. Тогда $OM$ – радиус $\Rightarrow OM = 5$, а $OH$ – расстояние от точки $O$ до прямой $AD$, $OH = 6$.

$$MH = OM + OH = 5 + 6 = 11.$$

Рассмотрим $\triangle AOK$ – прямоугольный (т.к. $OK \perp AC$). По теореме Пифагора:

$$AK^2 = 13^2 - 5^2 = (13-5)(13+5) = 8 \cdot 18 = 144 \Rightarrow AK = 12.$$

$AP = AK = 12$ (как отрезки касательных, проведённых из одной точки), аналогично $BP = BM$, $CM = CK$.
Площадь треугольника $ABC$ можно найти по формуле $S = p \cdot r$.

$$P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 2 \cdot (12 + BM + CM) = 2 \cdot (12 + BC).$$

Тогда:

$$p_{\triangle ABC} = \frac{P_{\triangle ABC}}{2} = 12 + BC.$$

Выразим площадь:

$$S_{\triangle ABC} = (12 + BC) \cdot 5.$$

Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$:
1) $AB = CD$ и $BC = AD$ (как противоположные стороны параллелограмма),
2) $AC$ – общая.
Значит, $\triangle ABC = \triangle ADC$ (по трём сторонам), и их площади равны:

$$S_{ABC} = S_{ADC}.$$

Площадь параллелограмма:

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = 2 \cdot S_{ABC} = 2 \cdot (12 + BC) \cdot 5 = 10(12 + BC).$$

С другой стороны:

$$S_{ABCD} = BC \cdot MH = BC \cdot 11.$$

Приравняем:

$$10 \cdot (12 + BC) = BC \cdot 11 \Leftrightarrow 120 + 10BC = 11BC \Leftrightarrow -BC = -120 \Leftrightarrow BC = 120.$$

Тогда:

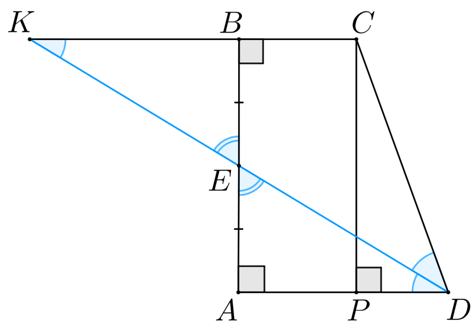
$$S_{ABCD} = 120 \cdot 11 = 1320.$$

**ОТВЕТ:** $1320$.

## Задание 7.

Боковые стороны $AB$ и $CD$ трапеции $ABCD$ равны соответственно $36$ и $39$, а основание $BC$ равно $12$. Биссектриса угла $ADC$ проходит через середину стороны $AB$. Найдите площадь трапеции.

### Решение




**Дано:** $ABCD$ – трапеция, $DE$ – биссектриса, $E$ – середина $AB$, $AB = 36$, $CD = 39$, $BC = 12$.

**Найти:** $S_{ABCD}$.

**Решение:**
Пусть $DE$ – биссектриса угла $ADC$, тогда $E$ – середина стороны $AB$. Продолжим $ED$ до пересечения с продолжением стороны $BC$ в точке $K$. Так как основания трапеции параллельны, то $BC \parallel AD$ и $KC \parallel AD$.

Рассмотрим $\triangle KEB$ и $\triangle AED$:
1) $\angle KEB = \angle AED$ (по свойству вертикальных углов);
2) $\angle KBE = \angle DAE$ (как накрест лежащие углы при $KC \parallel AD$ и секущей $BA$);
3) $AE = EB$ (так как $E$ – середина $AB$).
Значит, $\triangle KEB = \triangle AED$ (по стороне и прилежащим к ней углам) $\Rightarrow KB = AD$.
$\angle CDK = \angle ADK$ (так как $DE$ – биссектриса).
$\angle ADK = \angle CKD$ (как накрест лежащие углы при $KC \parallel AD$ и секущей $KD$).
Значит, $\angle CDK = \angle CKD \Rightarrow \triangle KCD$ – равнобедренный (по признаку) $\Rightarrow KC = CD = 39$.

$$KC = KB + BC \Rightarrow KB = KC - BC = 39 - 12 = 27 \Rightarrow AD = 27.$$

Построим $CP \parallel AB$, тогда $ABCP$ – параллелограмм ($BC \parallel AD$ как основания трапеции), значит, $BC \parallel AP$, а $AB \parallel CP$ по построению $\Rightarrow AP = BC = 12$ и $CP = AB = 36$.

$$AD = AP + PD \Rightarrow PD = AD - AP = 27 - 12 = 15.$$

В треугольнике $CPD$ по теореме, обратной теореме Пифагора:

$$CD^2 = CP^2 + PD^2 \Rightarrow 39^2 = 36^2 + 15^2 \Rightarrow 1521 = 1296 + 225 \Rightarrow 1521 = 1521.$$

Так как равенство верное, $\triangle CPD$ – прямоугольный $\Rightarrow \angle CPD = 90^\circ$ и $CP$ – высота. Это также значит, что $AB$ – высота, а трапеция – прямоугольная.
Площадь трапеции:

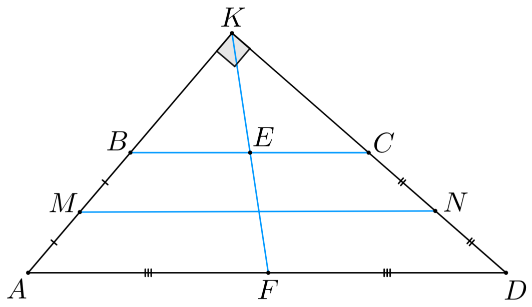
$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot AB = \frac{12 + 27}{2} \cdot 36 = 702.$$

**ОТВЕТ:** $702$.

## Задание 8.

Углы при одном из оснований трапеции равны $53°$ и $37°$, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны $6$ и $2$. Найдите основания трапеции.

### Решение




**Дано:** $ABCD$ – трапеция, $\angle A = 53°$, $\angle D = 37°$, $MN = 6$, $EF = 2$.

**Найти:** $BC$, $AD$.

**Решение:**
Пусть $M$ – середина стороны $AB$, $N$ – середина стороны $CD$, $F$ – середина $AD$. Тогда $MN$ – средняя линия $\Rightarrow$ $MN \parallel BC \parallel AD$ (так как средняя линия трапеции параллельна её основаниям).
Продолжим боковые стороны трапеции $AB$ и $CD$ до пересечения в точке $K$.
В $\triangle AKD$ по теореме о сумме углов в треугольнике:

$$\angle AKD = 180° - 53° - 37° = 90°.$$

Так как $F$ – середина $AD$, то $KF$ – медиана прямоугольного треугольника, значит:

$$KF = FD = AF = \frac{AD}{2}.$$

$KF$ пересекает $BC$ в точке $E$. Докажем, что точка $E$ – середина стороны $BC$.
Рассмотрим $\triangle BKE$ и $\triangle AKF$:
1) $\angle KBE = \angle KAF$ (как соответственные углы при $BC \parallel AD$ и секущей $AK$),
2) $\angle AKF$ – общий.
Значит, $\triangle BKE \sim \triangle AKF$ (по двум углам), следовательно:

$$\frac{BE}{AF} = \frac{KE}{KF}.$$

Аналогично рассмотрим $\triangle CKE$ и $\triangle DKF$:
1) $\angle KCE = \angle KDF$ (как соответственные углы при $BC \parallel AD$ и секущей $DK$),
2) $\angle DKF$ – общий.
Значит, $\triangle CKE \sim \triangle DKF$ (по двум углам), следовательно:

$$\frac{CE}{FD} = \frac{KE}{KF}.$$

Тогда имеем:

$$\frac{BE}{AF} = \frac{KE}{KF} = \frac{CE}{FD} \Rightarrow \frac{CE}{FD} = \frac{BE}{AF}.$$

Так как $AF = FD$, то $CE = BE \Rightarrow E$ – середина $BC$.
Так как $E$ – середина $BC$, то $KE$ – медиана прямоугольного треугольника $BKC$, значит:

$$KE = BE = CE = \frac{BC}{2}.$$

$$EF = KF - KE = \frac{AD}{2} - \frac{BC}{2} = \frac{AD - BC}{2} = 2.$$

Найдем среднюю линию трапеции:

$$MN = \frac{AD + BC}{2} = 6.$$

Тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{AD - BC}{2} = 2, \\ \dfrac{AD + BC}{2} = 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AD - BC = 4, \\ AD + BC = 12. \end{cases}$$

Сложим уравнения:

$$2AD = 16 \Rightarrow AD = 8.$$

Подставим в первое уравнение:

$$8 - BC = 4 \Rightarrow BC = 4.$$

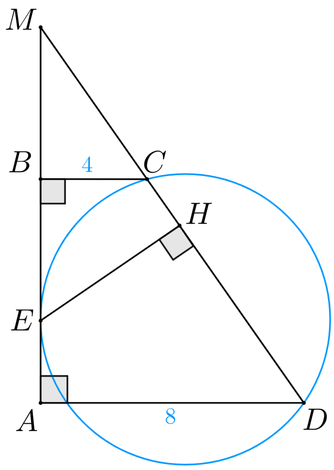
Таким образом, основания трапеции: $4$ и $8$.

**ОТВЕТ:** $4$ и $8$.

## Задание 9.

В трапеции $ABCD$ боковая сторона $AB$ перпендикулярна основанию $BC$. Окружность проходит через точки $C$ и $D$ и касается прямой $AB$ в точке $E$. Найдите расстояние от точки $E$ до прямой $CD$, если $AD = 8$, $BC = 4$.

### Решение




**Дано:** $ABCD$ – прямоугольная трапеция, окружность проходит через точки $C$, $D$ и касается $AB$ в точке $E$, $BC = 4$, $AD = 8$.

**Найти:** $EH$.

**Решение:**
Продолжим боковые стороны трапеции за точки $B$ и $C$ до пересечения в точке $M$.
Построим $EH$ – перпендикуляр к $CD$, тогда это и есть искомое расстояние и $\angle MHE = 90°$.
Так как трапеция прямоугольная, то $\angle ABC = \angle BAD = 90° \Rightarrow \angle MBC = 90°$.
Рассмотрим $\triangle MBC$ и $\triangle MAD$:
1) $\angle MBC = \angle MAD = 90°$,
2) $\angle BMC$ – общий.
Значит, $\triangle MBC \sim \triangle MAD$ по двум углам, следовательно:

$$\frac{MC}{MD} = \frac{BC}{AD} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Пусть $MC = x$, тогда $MD = 2x$.
Рассмотрим $\triangle MBC$ и $\triangle MHE$:
1) $\angle MBC = \angle MHE = 90°$,
2) $\angle BMC$ – общий.
Следовательно, $\triangle MBC \sim \triangle MHE$ по двум углам, откуда:

$$\frac{MC}{ME} = \frac{BC}{EH} \Rightarrow EH = \frac{ME \cdot BC}{MC}.$$

По теореме о касательной и секущей:

$$ME^2 = MC \cdot MD \Rightarrow ME^2 = x \cdot 2x = 2x^2 \Rightarrow ME = x\sqrt{2}.$$

Подставим в формулу:

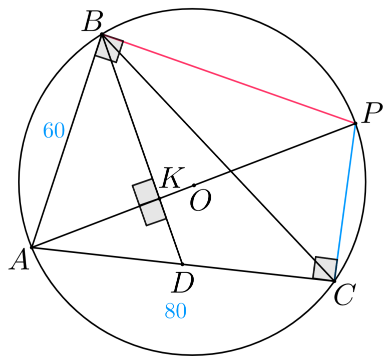
$$EH = \frac{x\sqrt{2} \cdot 4}{x} = 4\sqrt{2}.$$

**ОТВЕТ:** $4\sqrt{2}$.

## Задание 10.

В треугольнике $ABC$ известны длины сторон $AB = 60$, $AC = 80$. Точка $O$ – центр окружности, описанной около треугольника $ABC$. Прямая $BD$, перпендикулярная прямой $AO$, пересекает сторону $AC$ в точке $D$. Найдите $CD$.

### Решение




**Дано:** $\triangle ABC$, $AB = 60$, $AC = 80$, $O$ – центр описанной окружности, $BD \perp AO$, $BD \cap AC = D$.

**Найти:** $CD$.

**Решение:**
Продолжим прямую $AO$ до пересечения с окружностью в точке $P$, тогда $AP$ – диаметр окружности. Проведем отрезки $BP$ и $CP$.
$\angle ABP$ – вписанный, опирается на диаметр, значит $\angle ABP = 90°$. Аналогично $\angle ACP = 90°$.
Рассмотрим $\triangle AKB$ и $\triangle ABP$:
1) $\angle AKB = \angle ABP = 90°$,
2) $\angle BAK$ – общий
Значит, $\triangle AKB \sim \triangle ABP$ по двум углам:

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AB}{AP} \Rightarrow AK \cdot AP = AB^2.$$

Рассмотрим $\triangle AKD$ и $\triangle ACP$:
1) $\angle AKD = \angle ACP = 90°$,
2) $\angle KAD$ – общий
Значит, $\triangle AKD \sim \triangle ACP$ по двум углам:

$$\frac{AK}{AC} = \frac{AD}{AP} \Rightarrow AD \cdot AC = AK \cdot AP.$$

Подставим:

$$AD \cdot AC = AB^2 \Rightarrow AD \cdot 80 = 60^2 \Rightarrow AD = \frac{60 \cdot 60}{80} = \frac{3 \cdot 15}{1} = 45.$$

Тогда:

$$CD = AC - AD = 80 - 45 = 35.$$

**ОТВЕТ:** 35.

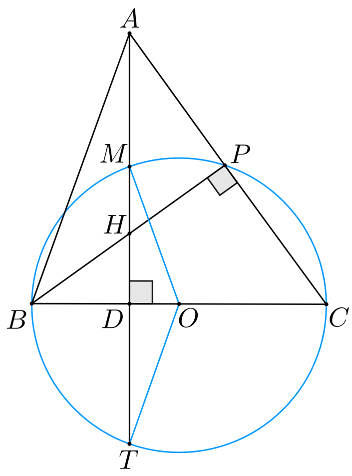
## Задание 11.

На стороне $BC$ остроугольного треугольника $ABC$ $(AB \neq AC)$ как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту $AD$ в точке $M$, $AD = 90$, $MD = 69$. $H$ – точка пересечения высот треугольника $ABC$. Найдите $AH$.

### Решение

**Дано:** $\triangle ABC$, полуокружность с диаметром $BC$, $AD$ – высота, полуокружность пересекает $AD$ в точке $M$, $AD = 90$, $MD = 69$, $H$ – точка пересечения высот $\triangle ABC$.

**Найти:** $AH$.




**Решение:**
Построим $BP$ так, чтобы $\angle BPC$ был вписанным. Значит, $\angle BPC = 90° \Rightarrow BP$ – высота $ABC$. Тогда $BP \cap AD = H$.
Рассмотрим $\triangle APH$ и $\triangle ADC$:
1) $\angle APH = \angle ADC = 90°$,
2) $\angle HAP$ – общий
Значит, $\triangle APH \sim \triangle ADC$ по двум углам

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AP}{AD} \Rightarrow AH \cdot AD = AP \cdot AC.$$

Продолжим $AD$ за точку $D$ до пересечения с полуокружностью в точке $T$, тогда $AT$ – секущая. Пусть $O$ – центр полуокружности. Проведём радиусы $OM$ и $OT$. Так как $OM = OT$, $\triangle MOT$ – равнобедренный, значит, его высота $OD$ также является медианой $\Rightarrow MD = DT = 69$.

$$AT = AD + DT = 90 + 69 = 159, \quad AM = AD - MD = 90 - 69 = 21.$$

По теореме о секущих:

$$AP \cdot AC = AM \cdot AT = 21 \cdot 159 = 3339.$$

Значит:

$$AH \cdot AD = 3339 \Rightarrow AH = \frac{3339}{90} = 37,1.$$

**ОТВЕТ:** $37,1$.

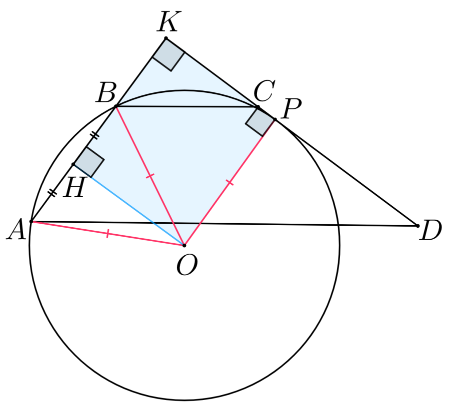
## Задание 12.

В трапеции $ABCD$ основания $AD$ и $BC$ равны соответственно $32$ и $4$, а сумма углов при основании $AD$ равна $90°$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки $A$ и $B$ и касающейся прямой $CD$, если $AB = 14$.

### Решение

**Дано:** $ABCD$ – трапеция, $AD = 32$, $BC = 4$, $\angle A + \angle D = 90°$, $AB = 14$, окружность проходит через точки $A$ и $B$ и касается прямой $CD$.

**Найти:** радиус окружности.




**Решение:**
Продолжим боковые стороны $AB$ и $CD$ до пересечения в точке $K$.
В $\triangle AKD$ по теореме о сумме углов:

$$\angle AKD = 180° - 90° = 90°.$$

Рассмотрим треугольники $\triangle BKC$ и $\triangle AKD$:
1) $\angle KBC = \angle KAD$ – как соответственные углы при $BC \parallel AD$ и секущей $AK$,
2) $\angle AKD$ – общий.
Значит, $\triangle BKC \sim \triangle AKD$ по двум углам:

$$\frac{BK}{AK} = \frac{BC}{AD} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

Учитывая $AK = AB + BK$, получаем:

$$8BK = AB + BK = 14 + BK \Rightarrow 8BK - BK = 14 \Rightarrow 7BK = 14 \Rightarrow BK = 2.$$

Пусть окружность касается $CD$ в точке $P$, а $O$ – центр окружности.
Построим радиусы $OP = OA = OB$. Построим $OH$ – высоту $\triangle AOB$. Так как $OA = OB$, то $\triangle AOB$ – равнобедренный, значит, $OH$ – медиана, биссектриса и высота. Значит,

$$AH = HB = \frac{AB}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

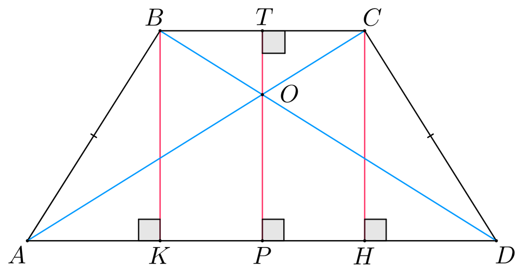
Рассмотрим четырёхугольник $KPOH$:
$KP \perp AK, OH \perp AK \Rightarrow KP \parallel OH;$
$PO \perp KD$ (как радиус, проведенный в точку касания), $KH \perp KD \Rightarrow PO \parallel KH$.
Следовательно, $KPOH$ – параллелограмм $\Rightarrow PO = KH = BK + HB = 2 + 7 = 9$.

**ОТВЕТ:** $9$.

## Задание 13.

В равнобедренную трапецию, периметр которой равен $100$, а площадь равна $500$, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

### Решение




**Дано:** $ABCD$ – равнобедренная трапеция, $P = 100$, $S = 500$, в трапецию можно вписать окружность; т. $O$ – точка пересечения диагоналей.

**Найти:** $OT$.

**Решение:**
Построим высоты трапеции $BK = TP = CH$, как показано на рисунке. Тогда искомое расстояние равно $OT$.
Так как в трапецию можно вписать окружность, то $BC + AD = AB + CD$.
Периметр:

$$P = BC + AD + AB + CD = 100,$$

тогда:

$$BC + AD = 50, \quad AB + CD = 50.$$

Поскольку трапеция равнобедренная, боковые стороны равны:

$$AB = CD = 25.$$

Площадь трапеции:

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot TP \Rightarrow 500 = \frac{50}{2} \cdot TP \Rightarrow TP = 20.$$

Значит, $BK = TP = CH = 20$.
Рассмотрим прямоугольные $\triangle ABK$ и $\triangle DCH$:
1) $CH = BK = 20$ – высоты одной трапеции,
2) $AB = CD$ – боковые стороны равнобедренной трапеции, значит, $\triangle ABK = \triangle DCH$ по катету и гипотенузе, следовательно, $AK = HD$.
По теореме Пифагора в $\triangle ABK$:

$$AK^2 + BK^2 = AB^2 \Rightarrow AK^2 + 20^2 = 25^2 \Leftrightarrow AK^2 = 625 - 400 = 225 \Rightarrow AK = 15.$$

Четырёхугольник $KBCH$ – параллелограмм $(BC \parallel KH$ и $BK \parallel CH)$, значит $BC = KH$.
Запишем сумму:

$$BC + AD = BC + AK + KH + HD = BC + 15 + BC + 15 = 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2BC + 30 = 50 \Leftrightarrow 2BC = 20 \Leftrightarrow BC = 10.$$

Тогда:

$$AD = 50 - BC = 40.$$

Рассмотрим $\triangle COT$ и $\triangle AOP$:

1) $\angle BCO = \angle OAD$ как накрест лежащие углы при $BC \parallel AD$ и секущей $AC$,
2) $\angle TOC = \angle AOP$ как вертикальные углы, значит, $\triangle COT \sim \triangle AOP$ (по двум углам), следовательно:

$$\frac{OT}{OP} = \frac{BC}{AD} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}.$$

Из подобия:

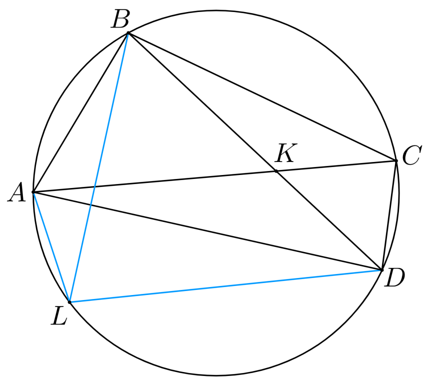
$$4 \cdot OT = 20 - OT \Leftrightarrow 5 \cdot OT = 20 \Rightarrow OT = \frac{20}{5} = 4.$$

**ОТВЕТ:** $4.$

## Задание 14.

Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 43$ и $CD = 4$ вписан в окружность. Диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $K$, причём $\angle AKB = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.

### Решение




**Дано:** $ABCD$ – вписанный четырёхугольник,
$AB = 43$, $CD = 4$, $BD \cap AC = K$, $\angle AKB = 60^\circ$.

**Найти:** $R$.

**Решение:**
Построим $DL \parallel AC \Rightarrow \smile AL = \smile CD \Rightarrow AL = CD = 4$.
$\angle BKA = \angle BDL = 60^\circ$, как соответственные углы при $AC \parallel DL$ и секущей $BD$.
Точки $A$, $B$, $D$, $L$ лежат на одной окружности, поэтому четырёхугольник $ABDL$ – вписанный. По свойству вписанного четырёхугольника:

$$\angle BAL = 180^\circ - \angle BDL = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Найдём синус и косинус угла $120^\circ$:

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$$

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В $\triangle ABL$ по теореме косинусов:

$$BL^2 = AB^2 + AL^2 - 2 \cdot AB \cdot AL \cdot \cos \angle BAL = 43^2 + 4^2 - 2 \cdot 43 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 1849 + 16 + 172 = 2037 \Rightarrow BL = \sqrt{2037}.$$

По теореме синусов в $\triangle ABL$:

$$\frac{BL}{\sin \angle BAL} = 2R \Rightarrow \frac{\sqrt{2037}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2037}}{\sqrt{3}} = R \Rightarrow R = \sqrt{679}.$$

**ОТВЕТ:** $\sqrt{679}$.

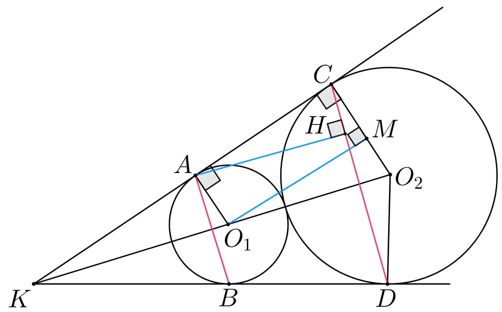
## Задание 15.

Окружности радиусов $14$ и $35$ касаются внешним образом. Точки $A$ и $B$ лежат на первой окружности, точки $C$ и $D$ – на второй. При этом $AC$ и $BD$ – общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми $AB$ и $CD$.

**Решение**

**Дано:** Окружность с центром в точке $O_1$ и радиусом $14$, окружность с центром в точке $O_2$ и радиусом $35$, $AC$ и $BD$ – общие касательные окружностей.

**Найти:** $AH$.




**Решение:**
Построим $O_1A$ и $O_2C$ – радиусы в точки касания, значит, $O_1A \perp AC$ и $O_2C \perp AC$.
Построим $AH \perp CD$, $O_1M \parallel AC$, тогда четырёхугольник $AO_1MC$ – прямоугольник, откуда:

$$O_1A = CM = 14, \quad AC = O_1M.$$

$$MO_2 = CO_2 - CM = 35 - 14 = 21.$$

Расстояние между центрами окружностей:

$$O_1O_2 = 14 + 35 = 49.$$

В прямоугольном $\triangle O_1O_2M$ по теореме Пифагора:

$$O_1M = \sqrt{O_1O_2^2 - MO_2^2} = \sqrt{49^2 - 21^2} = \sqrt{2401 - 441} = \sqrt{1960} = 14\sqrt{10} \Rightarrow AC = 14\sqrt{10}.$$

Построим $O_2D$ – радиус, тогда $\triangle CO_2D$ равнобедренный. Так как $AC$ и $BD$ – касательные, то их точка пересечения и центры окружностей будут лежать на биссектрисе угла $CKD$, значит, $O_1O_2$ – биссектриса и высота в $\triangle CO_2D \Rightarrow O_1O_2 \perp CD$.
Так как $AH \perp CD$, то $O_1O_2 \parallel AH$.
Также $O_1M \parallel AC$, значит, $\angle CAH = \angle MO_1O_2$.
Запишем соотношение для косинусов:

$$\cos\angle CAH = \frac{AH}{AC}, \qquad \cos\angle MO_1O_2 = \frac{O_1M}{O_1O_2}.$$

Тогда:

$$\frac{AH}{AC} = \frac{O_1M}{O_1O_2} \Rightarrow AH = AC \cdot \frac{O_1M}{O_1O_2} = 14\sqrt{10} \cdot \frac{14\sqrt{10}}{49} = 40.$$

**ОТВЕТ:** $40$.

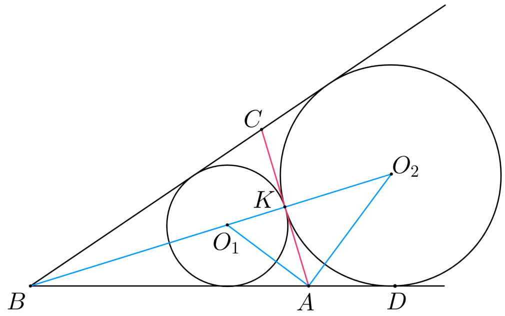
## Задание 16.

Основание $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$ равно $16$. Окружность радиусом $10$ с центром вне этого треугольника касается продолжений боковых сторон треугольника и касается основания $AC$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник $ABC$.

### Решение

**Дано:** $\triangle ABC$ – равнобедренный треугольник, $AC = 16$, $BA = BC$, окружность, касающаяся продолжений $BA$ и $BC$, и $R = 10$.

**Найти:** $r$.




**Решение:**
$BO_2$ – биссектриса $\angle ABC$, пусть $BO_2 \cap AC = K$, тогда $BK$ – высота и медиана $\triangle ABC$ по свойству равнобедренного треугольника. Следовательно:

$$AK = KC = \frac{AC}{2} = 8.$$

Построим $AO_1$ – биссектрису, так как центром окружности, вписанной в треугольник, является точка пересечения биссектрис. Тогда $\angle KAO_1 = \angle BAO_1$.
Построим $AO_2$ – биссектрису, так как центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе данного угла. Тогда $\angle KAO_2 = \angle DAO_2$.
Заметим, что $\angle KAB + \angle KAD = 180°$ (так как это смежные углы). Значит,

$$\angle KAO_1 + \angle KAO_2 = 90°,$$

а значит, $\triangle O_1AO_2$ – прямоугольный.
Так как высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые гипотенуза делится этой высотой, то

$$KA^2 = KO_1 \cdot KO_2 \Rightarrow 8^2 = KO_1 \cdot 10 \Leftrightarrow 64 = KO_1 \cdot 10 \Rightarrow KO_1 = \frac{64}{10} = 6,4.$$

**ОТВЕТ:** $6,4$.