

100 сотка



Нокаут / день 2

Математика

Конспект

**квадратные уравнения и неравенства, системы неравенств
№9, №13 · уравнения и их системы, неравенства №20**

уравнения, неравенства и их системы, уравнения второй части

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ №9

///
Квадратное уравнение — это уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ (при $a \neq 0$)
Многочлен $ax^2 + bx + c$ называется квадратным трехчленом

РЕШЕНИЕ ПОЛНЫХ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$

Дискриминант $D = b^2 - 4ac$
Формула корней квадратного уравнения
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0, b — \text{четное}$

Дискриминант $D_1 = k^2 - ac$, где $k = b/2$
Формула корней квадратного уравнения
 $x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$

По дискриминанту можно определить количество решений уравнения:
 $D > 0 \rightarrow 2$ решения; $D = 0 \rightarrow 1$ решение; $D < 0 \rightarrow$ корней нет.

Теорема Виета: $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = q, \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$, где x_1, x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$

Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два корня x_1 и x_2 , то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

РЕШЕНИЕ НЕПОЛНЫХ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

уравнение вида $ax^2 + bx = 0$

$x \cdot (ax + b) = 0$
 $x = 0$ или $ax + b = 0$
 $x = -b/a$

уравнение вида $ax^2 + c = 0$

$ax^2 = -c$
 $x^2 = -c/a$ ($m = -c/a$)
 $x = \pm\sqrt{m}$ (если $m \geq 0$)

уравнение вида $ax^2 = 0$

$x^2 = 0$
 $x = 0$

Пример 1

Решите уравнение $4x^2 + 10x - 6 = 0$.
В ответ запишите больший корень.

$a = 4, b = 10, c = -6$
 $D = 10^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6) = 100 + 96 = 196$
 $x = \frac{-10 + \sqrt{196}}{2 \cdot 4} = \frac{-10 + 14}{8} = \frac{4}{8} = 0,5$
 $x = \frac{-10 - \sqrt{196}}{2 \cdot 4} = \frac{-10 - 14}{8} = \frac{-24}{8} = -3$

Ответ: 0, 5

Пример 2

Решите уравнение $x^2 - 10x + 21 = 0$.
В ответ запишите больший корень.

$p = -10, q = 21$
 $D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21 = 100 - 84 = 16 > 0 \Rightarrow 2$ корня
По теореме Виета:
 $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 21, \\ x_1 + x_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7, \\ x = 3. \end{cases}$

Ответ: 7

Пример 3

Решите уравнение $x^2 - 36 = 0$.
В ответ впишите меньший корень.

$x^2 = 36$
 $x = \pm 6$

Ответ: - 6

Пример 4

Решите уравнение $9x^2 = 54x$.
В ответ впишите меньший корень.

$9x^2 - 54x = 0$
 $9x(x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 6$

Ответ: 0

Пример 5

Решите уравнение $(x - 5)^2 = (x + 10)^2$.

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 25 &= x^2 + 20x + 100 \\ -10x - 20x &= 100 - 25 \\ -30x &= 75 \mid : (-30) \\ x &= -2,5 \end{aligned}$$

Ответ:

Пример 6

Решите уравнение $(-5x + 3)(-x + 6) = 0$.
В ответ запишите больший из корней.

$$\begin{aligned} -5x + 3 &= 0 & \text{или} & & -x + 6 &= 0 \\ -5x &= -3 & & & -x &= -6 \\ x &= 0,6 & & & x &= 6 \end{aligned}$$

Ответ:

КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА №13

///
Квадратное неравенство — это неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ (при $a \neq 0$)
 Вместо знака $>$ может быть любой из знаков неравенств

АЛГОРИТМ

- 1 Привести неравенство к виду $ax^2 + bx + c > 0$.
- 2 Найти корни $ax^2 + bx + c$ и отметить их на координатной прямой.
- 3 Построить параболу с ветвями вверх/вниз (или интервалы) и расставить знаки.
- 4 Если знак неравенства $>$ или $\geq$, то делаем штриховку со знаком «+», если знаки $<$ или $\leq$, то — «-».

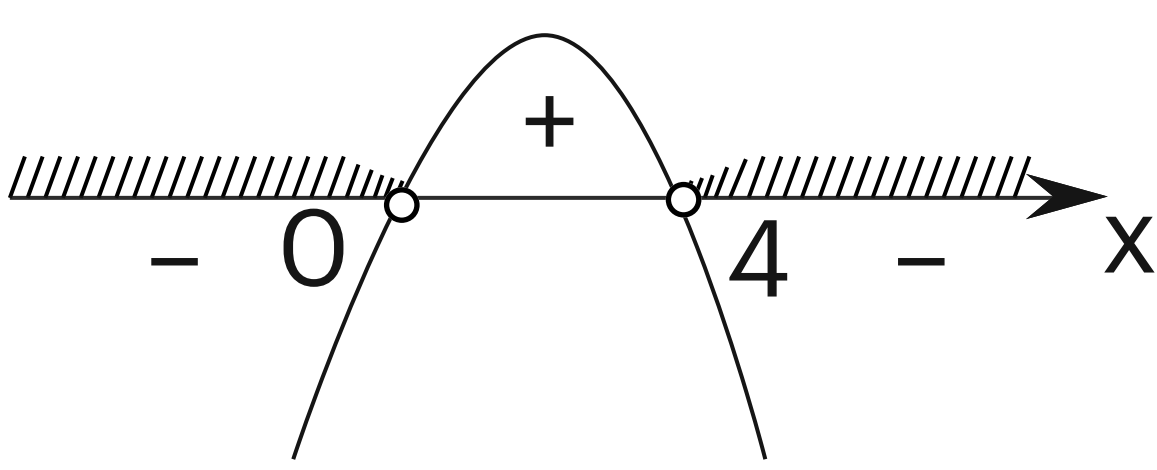


Пример 7

Укажите решение неравенства $4x - x^2 < 0$.

- 1) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$
- 2) $(0; +\infty)$
- 3) $(0; 4)$
- 4) $(4; +\infty)$

$$\begin{aligned} 4x - x^2 &< 0 \\ 4x - x^2 &= 0; x(4 - x) = 0 \\ x &= 0, x = 4 \\ a &= -1 < 0 \Rightarrow \text{ветви вниз} \end{aligned}$$



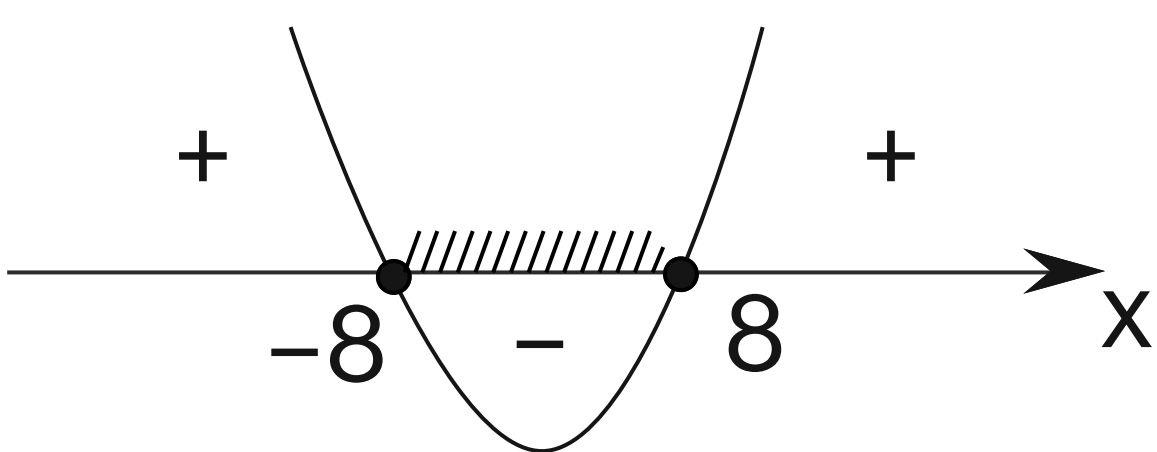
Ответ:

Пример 8

Укажите решение неравенства $x^2 \leq 64$.

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)

$$\begin{aligned} x^2 - 64 &\leq 0 \\ x^2 - 64 &= 0; x^2 = 64; x = \pm 8 \\ a &= 1 > 0 \Rightarrow \text{ветви вверх} \end{aligned}$$



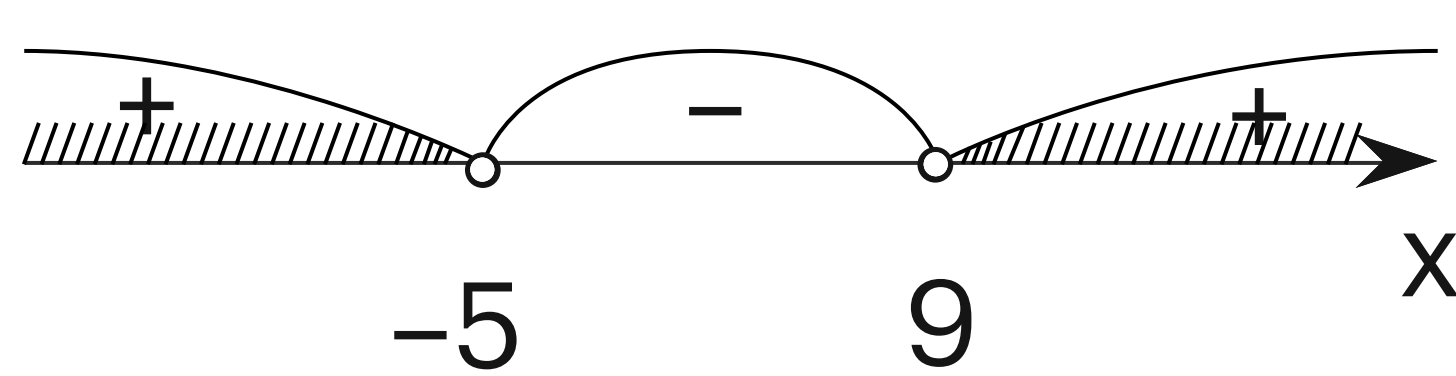
Ответ:

Пример 9

Укажите решение неравенства $(x + 5)(x - 9) > 0$.

- 1) $(-5; +\infty)$
- 2) $(-5; 9)$
- 3) $(9; +\infty)$
- 4) $(-\infty; -5) \cup (9; +\infty)$

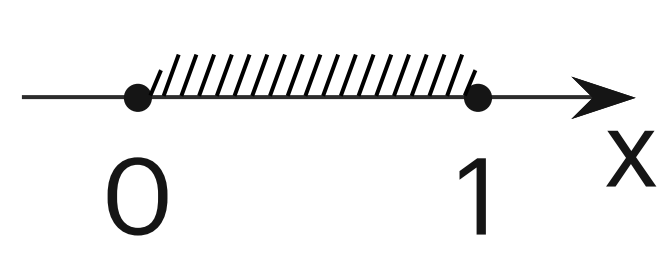
$$\begin{aligned} (x + 5)(x - 9) &= 0 \\ x + 5 &= 0 \text{ или } x - 9 = 0 \\ x &= -5 & x &= 9 \end{aligned}$$



Ответ:

Пример 10

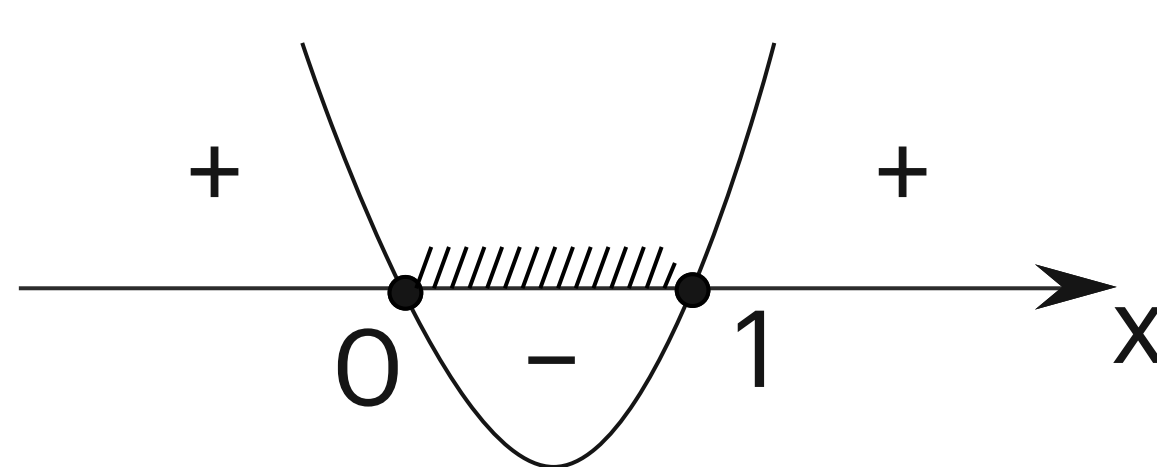
Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке.



- 1) $x^2 - 1 \leq 0$
- 2) $x^2 - x \geq 0$
- 3) $x^2 - 1 \geq 0$
- 4) $x^2 - x \leq 0$

На прямой отмечены числа 0 и 1, поэтому это не может быть решение неравенств 1, 3.

$$\begin{aligned} \text{Решим неравенство 4:} \\ x^2 - x &\leq 0 \\ x^2 - x &= 0 \Rightarrow x = 0, x = 1 \\ a &= 1 > 0 \Rightarrow \text{ветви вверх} \end{aligned}$$



Ответ:

СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ №13

Несколько неравенств с одной переменной x образуют **систему неравенств**, если нужно найти все значения переменной, при которых каждое из заданных неравенств обращается в верное числовое неравенство

АЛГОРИТМ

- 1 Решить каждое неравенство системы отдельно.
- 2 Отметить промежутки на одной координатной прямой.
- 3 Решением системы будет пересечение решений неравенств (т.е. один или несколько промежутков, на которых штриховки совпали).

Пример 11

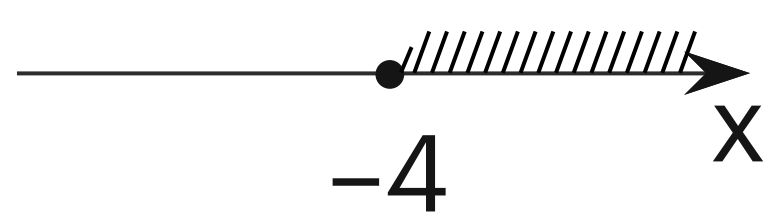
Укажите решение системы неравенств $\begin{cases} x + 3,4 \leq 0, \\ x + 5 \geq 1. \end{cases}$

- 1) $(-\infty; -4]$ 2) $[-3,4; +\infty)$ 3) $[-4; -3,4]$ 4) $(-\infty; -4] \cup [-3,4; +\infty)$

Решим первое неравенство:
 $x \leq -3,4$



Решим второе неравенство:
 $x \geq 1 - 5 \Leftrightarrow x \geq -4$



Отметим решения на одной прямой: тогда решение системы записано под цифрой 3.

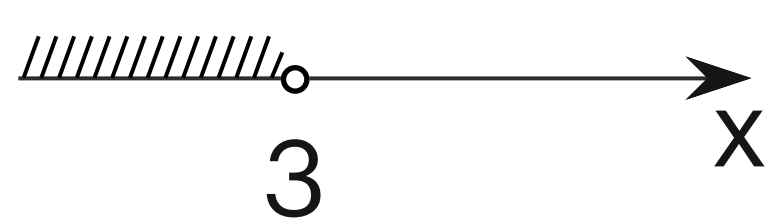
Ответ:

Пример 12

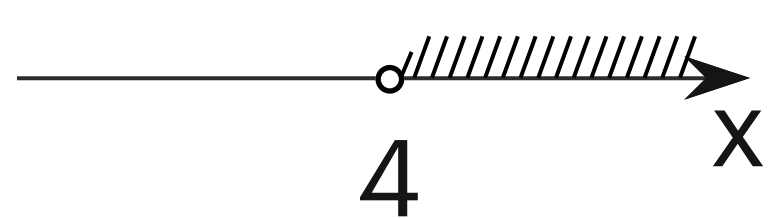
Укажите решение системы неравенств $\begin{cases} -9 + 3x < 0, \\ 2 - 3x < -10. \end{cases}$

- 1) $(-\infty; 3)$ 2) нет решений 3) $(4; +\infty)$ 4) $(3; 4)$

Решим первое неравенство:
 $3x < 9$
 $x < 3$



Решим второе неравенство:
 $-3x < -12$
 $x > 4$



Отметим решения на одной прямой: тогда система не имеет решений.

Ответ:

КУБИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ №20

Кубическое уравнение — это уравнение вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Такое уравнение может иметь до 3-х решений. Решаем разложением левой части на множители.

Способы разложения на множители:

- Вынесение общего множителя;
- Способ группировки;
- Применение ФСУ и формулы разложения квадратного трехчлена на множители.

Пример 13

Решите уравнение $x^3 + 5x^2 - 9x - 45 = 0$.

$$x^2(x + 5) - 9(x + 5) = 0$$

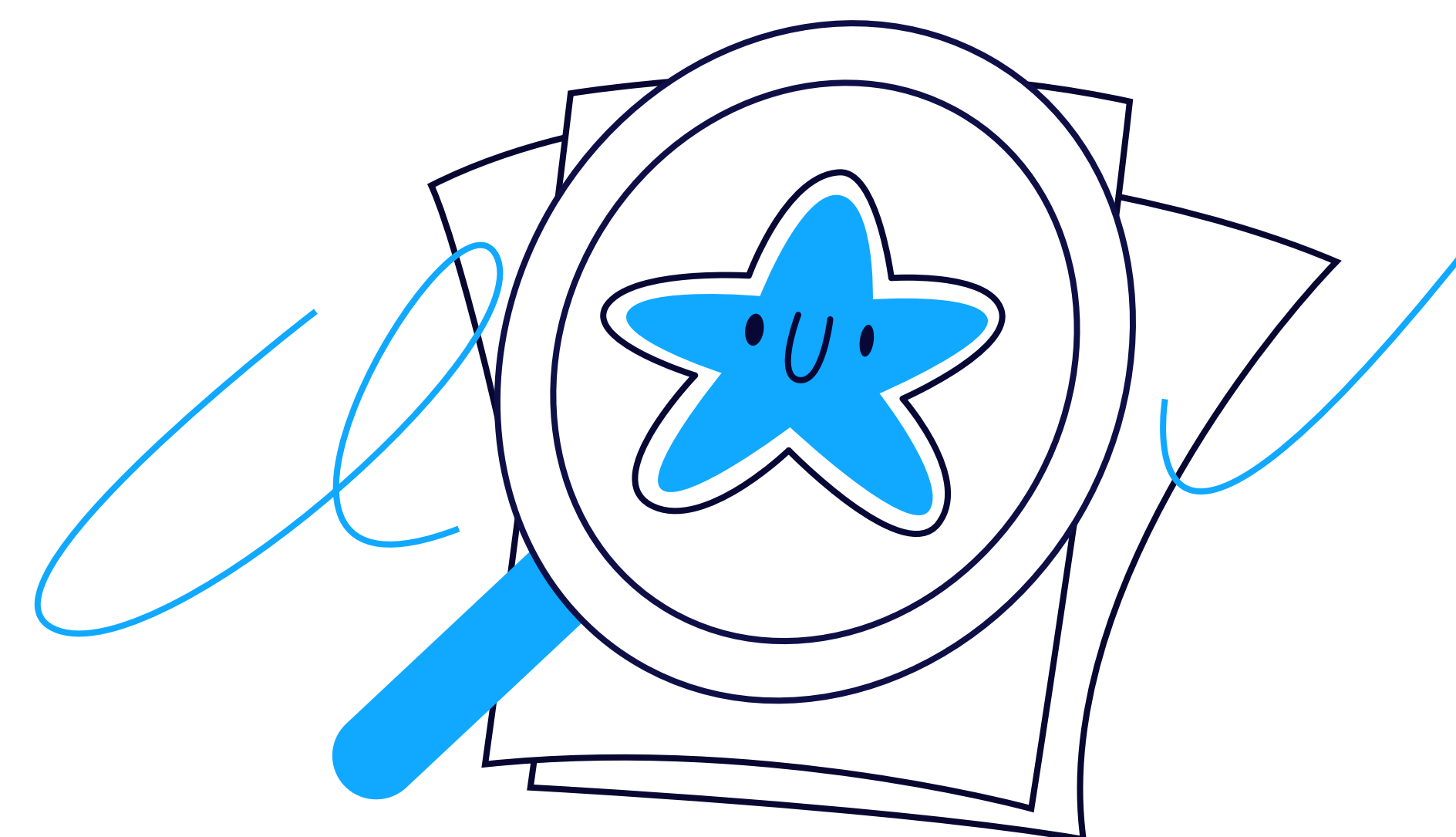
$$(x + 5)(x^2 - 9) = 0$$

$$x + 5 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - 9 = 0$$

$$x = -5 \quad x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Ответ: -5; -3; 3.



Пример 14

Решите уравнение $(x - 1)(x^2 + 4x + 4) = 4(x + 2)$.

$$(x - 1)(x + 2)^2 - 4(x + 2) = 0$$

$$(x + 2)((x - 1)(x + 2) - 4) = 0$$

$$x + 2 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + 2x - x - 2 - 4 = 0$$

$$x = -2 \quad x^2 + x - 6 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - 5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Ответ: -3; -2; 2.

Пример 15

Решите уравнение $x^4 = (2x - 8)^2$.

$$(x^2)^2 - (2x - 8)^2 = 0$$

$$(x^2 - (2x - 8))(x^2 + (2x - 8)) = 0$$

$$(x^2 - 2x + 8)(x^2 + 2x - 8) = 0$$

$$x^2 - 2x + 8 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$D = 4 - 32 = -28$$

корней нет

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$$

$$x = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 + 6}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 - 6}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Ответ: -4; 2.

УРАВНЕНИЕ ВИДА $a^2 + b^2 = 0$ №20

Любое выражение вида a^2 всегда принимает только неотрицательные значения, поэтому сумма $a^2 + b^2$ равна нулю только в том случае, когда оба слагаемых равны нулю одновременно, поэтому:

- перейти к системе $a^2 = 0$ и $b^2 = 0$;
- решить уравнения $a = 0$ и $b = 0$;
- из решений выбрать только **общий** корень.

Пример 16

Решите уравнение $(x^2 - 36)^2 + (x^2 + 4x - 12)^2 = 0$.

Так как $(x^2 - 36)^2 \geq 0$ и $(x^2 + 4x - 12)^2 \geq 0$, то их сумма будет равна 0 только в том случае, если оба слагаемых одновременно будут равны 0.

$$\begin{cases} (x^2 - 36)^2 = 0, \\ (x^2 + 4x - 12)^2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 36 = 0, \\ x^2 + 4x - 12 = 0; \end{cases}$$

Решим первое уравнение:

$$x^2 - 36 = 0$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm 6$$

Решим второе уравнение:

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 16 + 48 = 64$$

$$x = \frac{-4 + \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 + 8}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x = \frac{-4 - \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 - 8}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

$$\begin{cases} x^2 - 36 = 0, \\ x^2 + 4x - 12 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 6, \\ x = 2, x = -6; \end{cases} \Leftrightarrow x = -6.$$

Ответ: -6.

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ №20

— Если в уравнении есть деление на переменную, то обязательно необходимо указать, что знаменатель не может быть равен 0.

— Если в уравнении есть корень из переменной, то обязательно необходимо указать, что подкоренное выражение должно быть ≥ 0 .

Пример 17

Решите уравнение $\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 10 = 0$.

При $x^2 \neq 0$, $x \neq 0$: $\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 10 = 0 \mid \cdot x^2$

$$1 + 3x - 10x^2 = 0$$

$$-10x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot (-10) \cdot 1 = 9 + 40 = 49$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2 \cdot (-10)} = \frac{-3 + 7}{-20} = \frac{4}{-20} = -0,2$$

$$x = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2 \cdot (-10)} = \frac{-3 - 7}{-20} = \frac{-10}{-20} = 0,5$$

Ответ: -0,2; 0,5.

Пример 18

Решите уравнение $x^2 - 2x + \sqrt{3-x} = \sqrt{3-x} + 8$.

При $3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$:

$$x^2 - 2x + \sqrt{3-x} - \sqrt{3-x} - 8 = 0$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$$

$$x = \frac{2 + \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 + 6}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ — не удов. условию } x \leq 3$$

$$x = \frac{2 - \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 - 6}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Ответ: -2.

БИКВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ №20

///
Биквадратное уравнение — это уравнение вида: $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Такое уравнение может иметь до 4-х решений.

АЛГОРИТМ

- 1 Сделать замену $t = x^2$, $t^2 = x^4$, уравнение примет вид $at^2 + bt + c = 0$.
- 2 Решить полученное квадратное уравнение (найти значения t).
- 3 Выполнить обратную замену (вместо t в равенство $t = x^2$ подставить найденное число).
- 4 Найти значения x .

Пример 19

Решите уравнение $(x + 2)^4 - 4(x + 2)^2 - 5 = 0$.

Пусть $t = (x + 2)^2$, $t^2 = (x + 2)^4$, тогда уравнение примет вид:

$$t^2 - 4t - 5 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36$$

$$t = \frac{4 + \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 6}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$t = \frac{4 - \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 6}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Обратная замена:

1. $(x + 2)^2 = -1$ — нет решений

Ответ: $-2 - \sqrt{5}$; $-2 + \sqrt{5}$.

$$2. (x + 2)^2 = 5$$

$$x^2 + 4x + 4 - 5 = 0$$

$$x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 16 + 4 = 20$$

$$x = \frac{-4 + \sqrt{20}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 + 2\sqrt{5}}{2} = \frac{2(-2 + \sqrt{5})}{2} = -2 + \sqrt{5}$$

$$x = \frac{-4 - \sqrt{20}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 - 2\sqrt{5}}{2} = \frac{2(-2 - \sqrt{5})}{2} = -2 - \sqrt{5}$$

Пример 20

Решите уравнение $\frac{1}{(x-5)^2} + \frac{6}{x-5} + 5 = 0$.

При $(x-5)^2 \neq 0$, $x \neq 5$: пусть $t = x - 5$, тогда уравнение примет вид $\frac{1}{t^2} + \frac{6}{t} + 5 = 0 \mid \cdot t^2$

$$1 + 6t + 5t^2 = 0$$

$$5t^2 + 6t + 1 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 36 - 20 = 16$$

$$t = \frac{-6 + \sqrt{16}}{2 \cdot 5} = \frac{-6 + 4}{10} = \frac{-2}{10} = -0,2$$

$$t = \frac{-6 - \sqrt{16}}{2 \cdot 5} = \frac{-6 - 4}{10} = \frac{-10}{10} = -1$$

Ответ: 4; 4,8.

Обратная замена:

$$1. x - 5 = -0,2$$

$$x = -0,2 + 5 = 4,8$$

$$2. x - 5 = -1$$

$$x = -1 + 5 = 4$$

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ №20

///

Несколько уравнений с двумя переменными образуют **систему уравнений**, если нужно найти все пары $(x; y)$, которые одновременно удовлетворяют каждому данному уравнению

Пример 21

Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x^2 - 3x = y, \\ 8x - 6 = y. \end{cases}$

$$4x^2 - 3x = 8x - 6$$

$$4x^2 - 3x - 8x + 6 = 0$$

$$4x^2 - 11x + 6 = 0$$

$$D = (-11)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 6 = 121 - 96 = 25$$

$$x = \frac{11 + \sqrt{25}}{2 \cdot 4} = \frac{11 + 5}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

$$x = \frac{11 - \sqrt{25}}{2 \cdot 4} = \frac{11 - 5}{8} = \frac{6}{8} = 0,75$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 8 \cdot 2 - 6 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0,75, \\ y = 8 \cdot 0,75 - 6 = 0; \end{cases}$$

Ответ: (2; 10), (0,75; 0).

Пример 23

Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 11, \\ 4x^2 + 6y^2 = 11x. \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 11 \mid \cdot (-2), \\ 4x^2 + 6y^2 = 11x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 - 6y^2 = -22, \\ 4x^2 + 6y^2 = 11x. \end{cases}$$

$$-4x^2 - 6y^2 + 4x^2 + 6y^2 = -22 + 11x$$

$$0 = -22 + 11x$$

$$11x = 22$$

$$x = 2$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ y^2 = (11 - 2 \cdot 2^2) : 3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = \pm 1. \end{cases}$$

Ответ: (2; 1), (2; -1).

Пример 22

Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2 + y = 4, \\ 2x^2 - y = 1. \end{cases}$

Сложим уравнения системы:

$$3x^2 + y + 2x^2 - y = 4 + 1$$

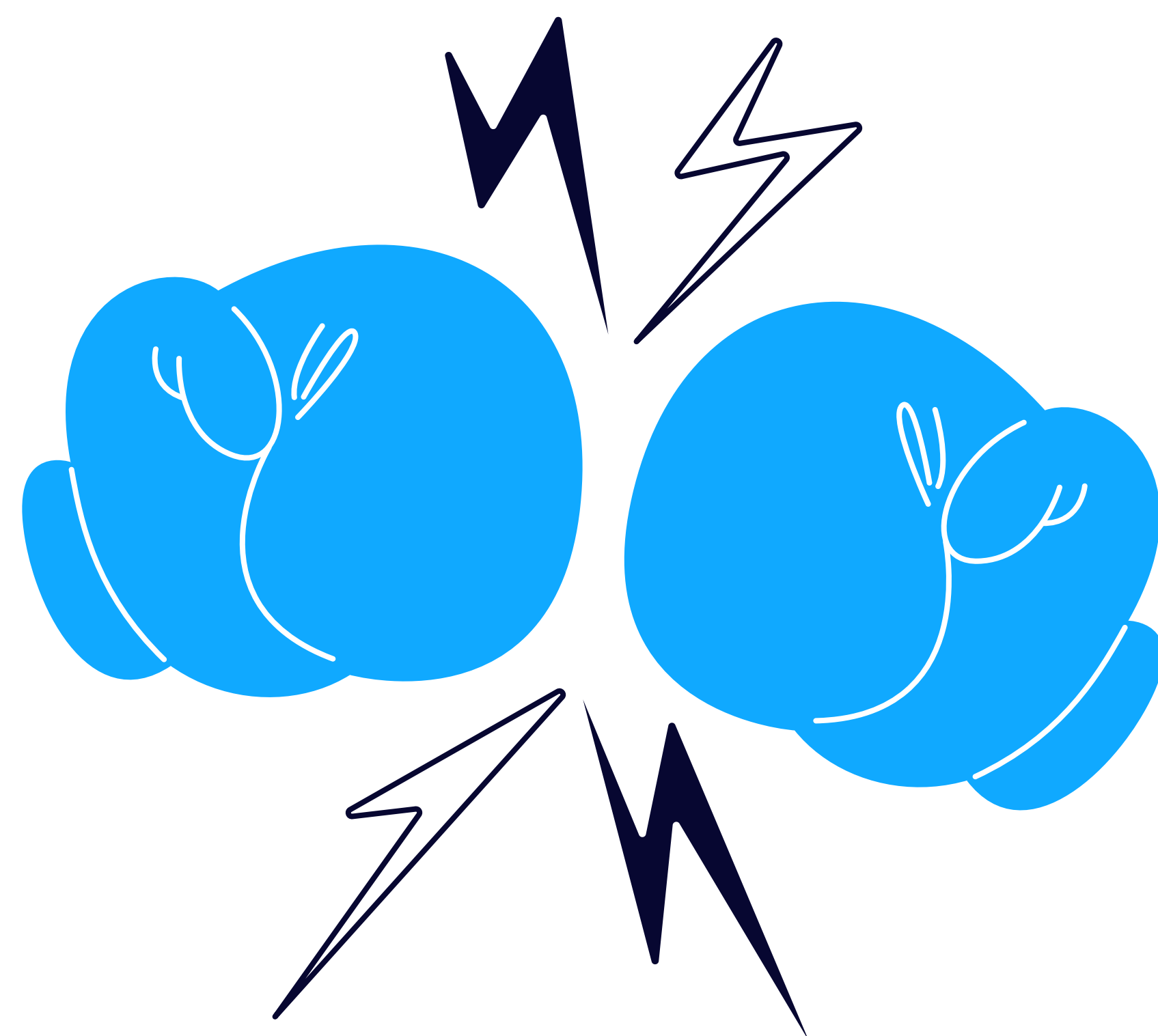
$$5x^2 = 5$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 4 - 3 \cdot 1^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = 4 - 3 \cdot (-1)^2 = 1; \end{cases}$$

Ответ: (1; 1), (-1; 1).



НЕРАВЕНСТВА №20

Пример 24

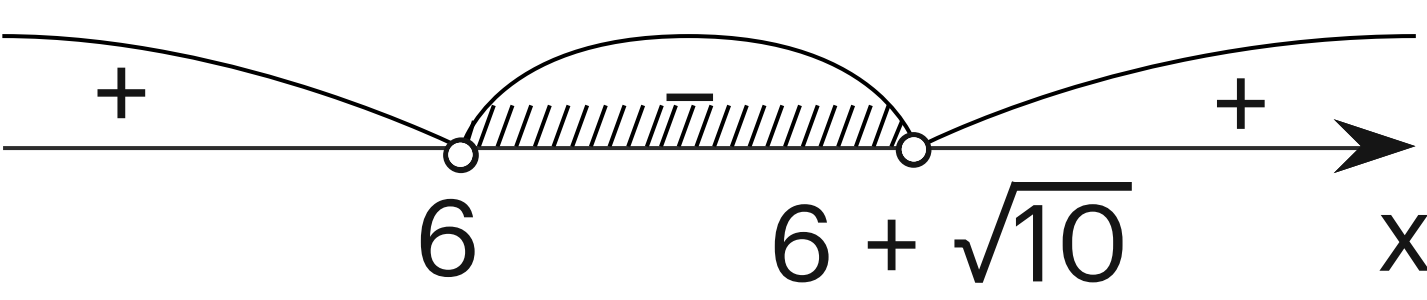
Решите неравенство $(x - 6)^2 < \sqrt{10}(x - 6)$.

$$(x - 6)^2 - \sqrt{10}(x - 6) < 0$$

$$(x - 6)(x - 6 - \sqrt{10}) < 0$$

$$(x - 6)(x - 6 - \sqrt{10}) = 0$$

$$x = 6 \text{ или } x = 6 + \sqrt{10}$$



Ответ: $x \in (6; 6 + \sqrt{10})$.

Пример 25

Решите уравнение $\frac{-14}{(x - 5)^2 - 2} \geq 0$.

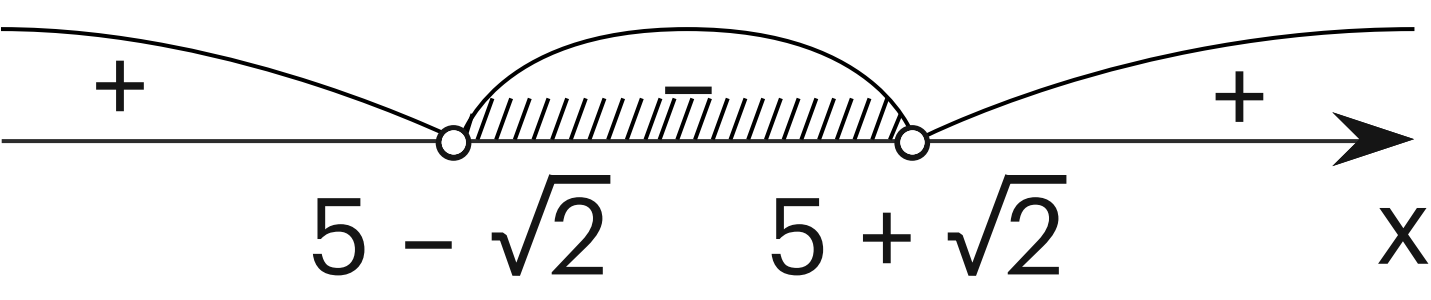
Так как $-14 < 0$, неравенство равносильно $(x - 5)^2 - 2 < 0$

$$(x - 5)^2 - (\sqrt{2})^2 < 0$$

$$(x - 5 - \sqrt{2})(x - 5 + \sqrt{2}) < 0$$

$$(x - 5 - \sqrt{2})(x - 5 + \sqrt{2}) = 0$$

$$x = 5 + \sqrt{2} \text{ или } x = 5 - \sqrt{2}$$



Ответ: $x \in (5 - \sqrt{2}; 5 + \sqrt{2})$.

$$\frac{a}{b} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a \leq 0, \\ b < 0 \end{cases}$$

$$\frac{a}{b} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a \leq 0, \\ b > 0 \end{cases}$$

для заметок:

