

100 СОТКА



Нокаут / день 3

Математика

Конспект

треугольники • тригонометрия • четырехугольники

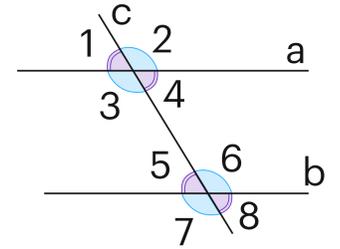
геометрия первой и второй части

ТРЕУГОЛЬНИКИ

/// **Параллельные прямые** — это две прямые, которые не пересекаются

$a \parallel b$, c — секущая

Внутренние накрест лежащие углы равны: $\angle 3 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 5$
 Соответственные углы равны: $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 8$
 Сумма двух односторонних углов равна 180° : $\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$, $\angle 4 + \angle 6 = 180^\circ$

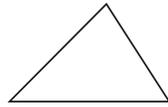


- В треугольнике против большей стороны лежит больший угол и, наоборот, против большего угла лежит большая сторона;
- Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон;
- Сумма углов треугольника равна 180° .

Пример 1

В треугольнике два угла равны 36° и 73° .
 Найдите его третий угол. Ответ дайте в градусах.

По теореме о сумме углов треугольника:
 $180^\circ - 36^\circ - 73^\circ = 71^\circ$.



Ответ:

Пример 2

Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 53° . Найдите его другой острый угол. Ответ дайте в градусах.

$90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$.

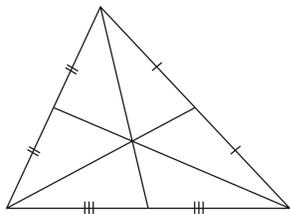


Ответ:

МЕДИАНА, БИСЕКТРИСА, ВЫСОТА

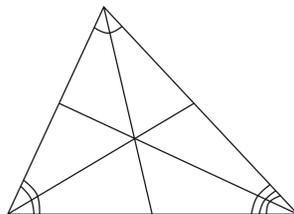
медиана

Медиана — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.



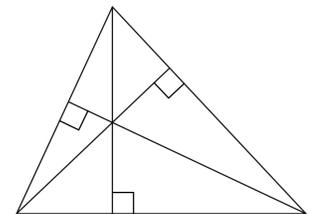
биссектриса

Биссектриса — отрезок, соединяющий вершину и противоположную сторону, делит угол при вершине пополам.



высота

Высота — это перпендикуляр, проведенный из вершины \triangle к противоположной стороне или ее продолжению.

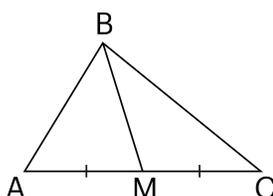


- Медианы \triangle пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины
- Медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника

Пример 3

В треугольнике ABC известно, что $AC = 38$, BM — медиана, $BM = 17$.
 Найдите длину отрезка AM .

$AM = MC = AC / 2 = 38 / 2 = 19$.

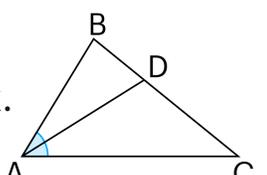


Ответ:

Пример 4

В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 82^\circ$, AD — биссектриса.
 Найдите $\angle BAD$. Ответ дайте в градусах.

$\angle BAD = \angle CAD = \angle BAC / 2 = 82^\circ / 2 = 41^\circ$.



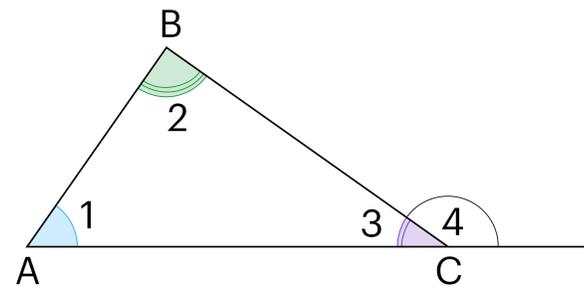
Ответ:

ВНЕШНИЙ УГОЛ ТРЕУГОЛЬНИКА

Внешний угол равен сумме двух углов, не смежных с ним

Доказательство:

$$\begin{aligned} \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 &= 180^\circ \Rightarrow \angle 3 = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2; \\ \angle 3 + \angle 4 &= 180^\circ \Rightarrow \angle 3 = 180^\circ - \angle 4; \\ 180^\circ - \angle 1 - \angle 2 &= 180^\circ - \angle 4 \Rightarrow \angle 4 = \angle 1 + \angle 2 \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

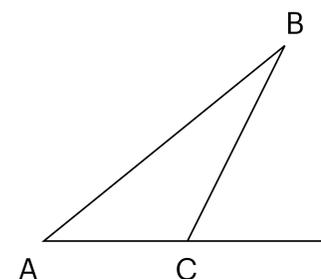


Пример 5

В треугольнике ABC угол C равен 106° . Найдите внешний угол при вершине C. Ответ дайте в градусах.

По свойству смежных углов: $180^\circ - 106^\circ = 74^\circ$.

Ответ:

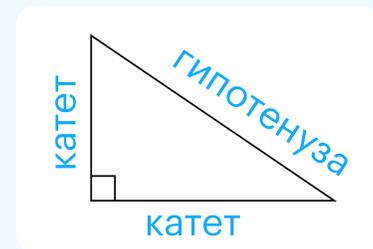


ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Прямоугольный треугольник — это треугольник, у которого один из углов прямой (т. е. равен 90°)

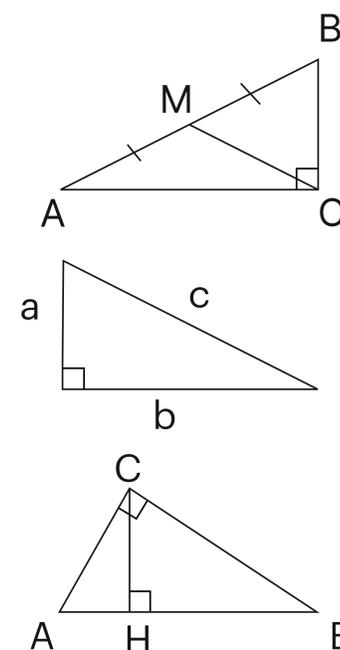
Гипотенуза — сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла (всегда больше катетов).

Катеты — стороны прямоугольного треугольника, образующие прямой угол.



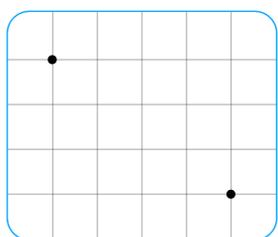
СВОЙСТВА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

- Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°
 $\angle CAB + \angle CBA = 90^\circ$
- Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы: если $\angle CAB = 30^\circ$, то $AB = 2 \cdot BC$
- Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы: $CM = AB/2$
- В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $c^2 = a^2 + b^2$
- Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна произведению длин катетов, деленному на длину гипотенузы: $CH = \frac{AC \cdot BC}{AB}$
- Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, есть среднее пропорциональное (среднее геометрическое) для отрезков, на которые гипотенуза делится этой высотой: $CH = \sqrt{AH \cdot BH}$



Пример 6

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображены две точки. Найдите расстояние между ними.

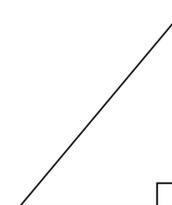


По т. Пифагора:
 $x^2 = 3^2 + 4^2 = 25$; $x = 5$.

Ответ:

Пример 7

В прямоугольном треугольнике катет и гипотенуза равны 7 и 25 соответственно. Найдите другой катет этого треугольника.



По т. Пифагора:
 $x^2 = 25^2 - 7^2 = 576$; $x = 24$.

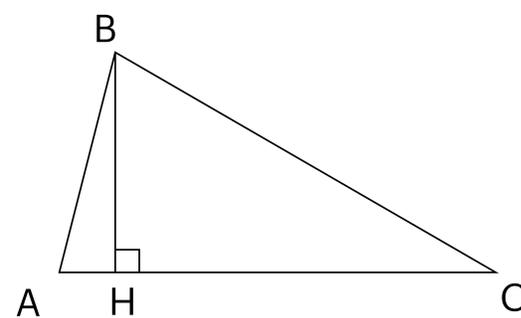
Ответ:

Пример 8

В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH, $\angle BAC = 73^\circ$. Найдите $\angle ABH$. Ответ дайте в градусах.

$90^\circ - 73^\circ = 17^\circ$.

Ответ: 1 7

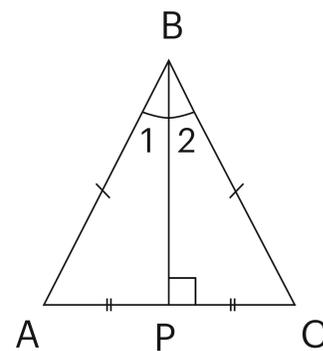


РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

///

Равнобедренный треугольник — это треугольник, у которого равны две стороны. Равные стороны называют **боковыми**, а третью сторону — **основанием** равнобедренного треугольника.

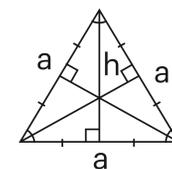
В равнобедренном треугольнике высота, биссектриса и медиана, проведенные к основанию, совпадают. Углы при основании равны. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle A = \angle C$, $AP = PC$. **Признак равнобедренного треугольника:** если у треугольника два угла равны, то этот треугольник — равнобедренный.



РАВНОСТОРОННИЙ (ПРАВИЛЬНЫЙ) ТРЕУГОЛЬНИК

///

Равносторонний треугольник — это треугольник, у которого равны все стороны. Все углы равны по 60° . В равностороннем треугольнике все биссектрисы, медианы и высоты равны. Центры вписанной и описанной окружностей совпадают.

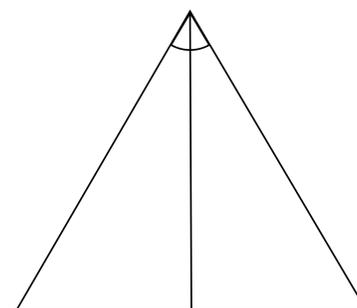


Пример 9

Сторона равностороннего треугольника равна $14\sqrt{3}$. Найдите биссектрису этого треугольника.

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{14\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 21$.

Ответ: 2 1

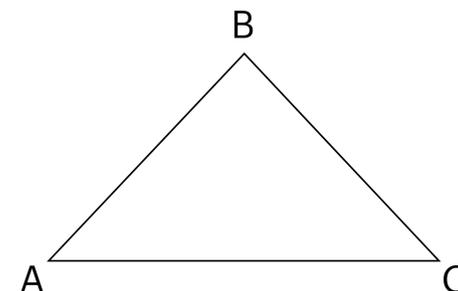


Пример 10

В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = 148^\circ$. Найдите $\angle BCA$. Ответ дайте в градусах.

Угол при основании равнобедренного треугольника равен полуразности 180° и угла, противолежащего основанию: $(180^\circ - 148^\circ) / 2 = 16^\circ$.

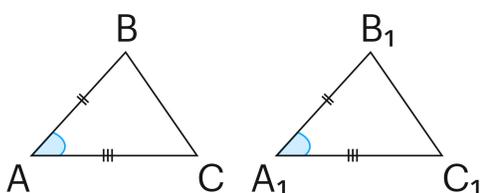
Ответ: 1 6



ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

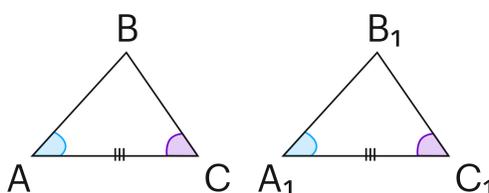
1 признак равенства

По двум сторонам и углу между ними



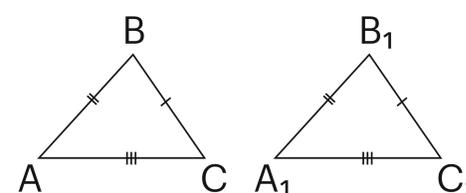
2 признак равенства

По стороне и двум прилежащим к ней углам



3 признак равенства

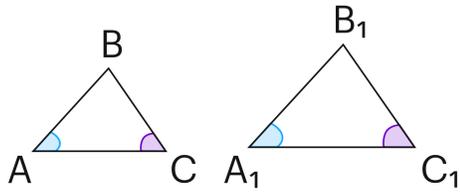
По трем равным сторонам



ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1 признак подобия

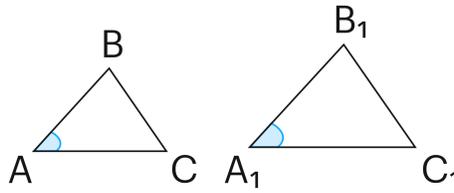
По двум равным углам



2 признак подобия

По двум пропорциональным сторонам и равным углам между ними

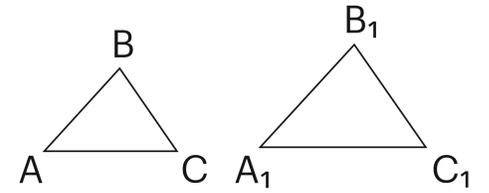
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$



3 признак подобия

По трем пропорциональным сторонам

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$



СВОЙСТВО ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Отношение площадей подобных треугольников равно коэффициенту подобия в квадрате

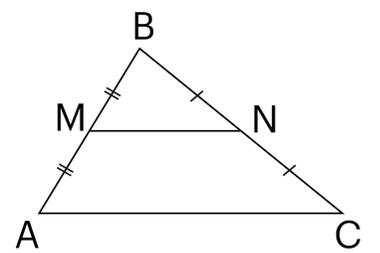
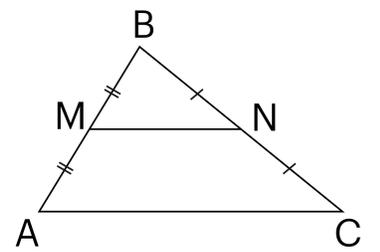
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$$

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

///
Средняя линия — это отрезок, который соединяет середины двух сторон треугольника

Средняя линия параллельна соответствующей стороне треугольника и равна её половине: $MN \parallel AC$,

$$MN = \frac{AC}{2}$$



Пример 11

Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC, $AB = 21$, $BC = 22$, $AC = 28$. Найдите MN.

MN — средняя линия, $MN = AC / 2 = 28 / 2 = 14$.

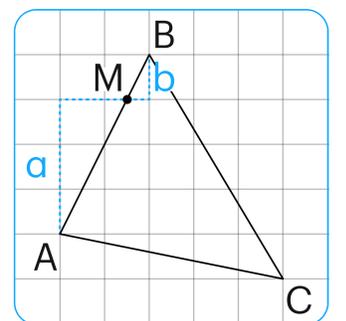
Ответ: 1 4

Пример 12

На клетчатой бумаге изображён треугольник ABC. Во сколько раз отрезок AM длиннее отрезка BM?

$$\frac{AM}{BM} = \frac{a}{b} = \frac{3}{1} = 3.$$

Ответ: 3

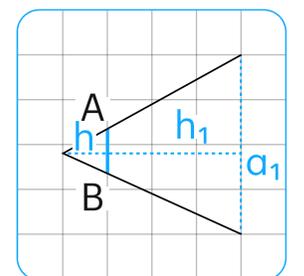


Пример 13

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена фигура. Найдите длину отрезка AB по данным чертежа.

$$\frac{a_1}{AB} = \frac{h_1}{h} \Rightarrow AB = a_1 h / h_1 = 4 \cdot 1 / 4 = 1.$$

Ответ: 1



Пример 14

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN , если $MN = 15$, $AC = 25$, $NC = 22$.

Дано:

$\triangle ABC$, $MN \parallel AC$, $MN = 15$, $AC = 25$, $NC = 22$.

Найти: BN .

Решение:

Рассмотрим $\triangle BMN$ и $\triangle ABC$:

- $\angle BMN = \angle BAC$ как соответственные углы при $MN \parallel AC$ и секущей AB
- $\angle ABC$ — общий

Значит, $\triangle BMN \sim \triangle ABC$ по двум углам $\Rightarrow \frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

$$BC = BN + NC = BN + 22$$

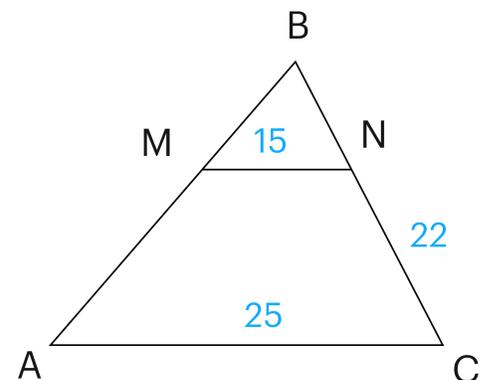
$$BN \cdot 5 = 3 \cdot BC$$

$$BN \cdot 5 = 3 \cdot (BN + 22)$$

$$5BN = 3BN + 66$$

$$BN = 33$$

Ответ: 33.



Пример 15

Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC . Найдите AB , если $AH = 4$, $AC = 16$.

Дано:

$\triangle ABC$ — прямоугольный, BH — высота, $\angle B = 90^\circ$, $AH = 4$, $AC = 16$.

Найти: AB .

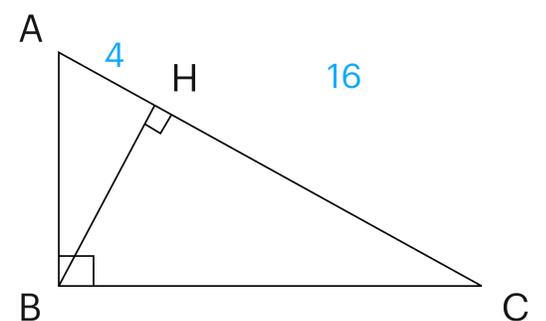
Решение:

Рассмотрим $\triangle ABH$ и $\triangle ABC$:

- $\angle ABC = \angle BHA = 90^\circ$
- $\angle A$ — общий

Значит, $\triangle ABH \sim \triangle ABC$ по двум углам $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB \cdot AB = AH \cdot AC \Rightarrow AB^2 = 4 \cdot 16 = 64 \Rightarrow AB = 8$.

Ответ: 8.



Пример 16

Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках K и M соответственно. Докажите, что отрезки BK и DM равны.

Дано:

$ABCD$ — параллелограмм, O — точка пересечения диагоналей, $KM \cap BC = K$, $KM \cap AD = M$, $O \in KM$.

Доказать: $BK = DM$.

Доказательство:

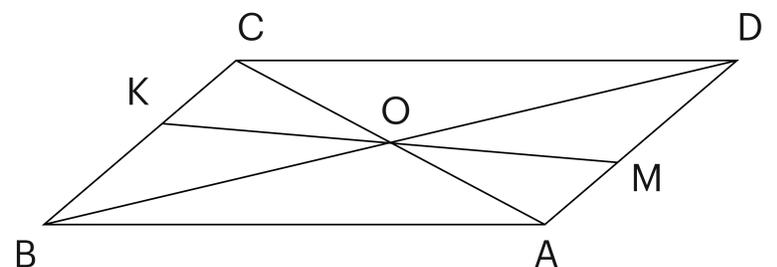
Рассмотрим $\triangle BOK$ и $\triangle DOM$:

$\angle BOK = \angle DOM$ как вертикальные углы

$\angle KBO = \angle MDO$ как накрест лежащие углы при $BC \parallel AD$ и секущей BD

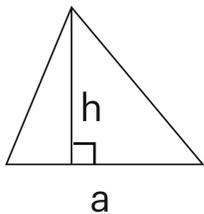
$BO = OD$, т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам

Значит, $\triangle BOK = \triangle DOM$ (по стороне и прилежащим к ней углам) $\Rightarrow BK = DM$ ч.т.д.

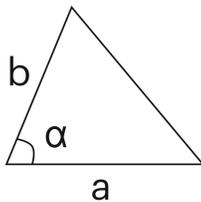


ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

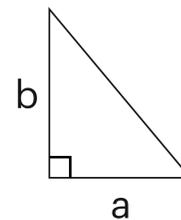
$$S = \frac{1}{2} \cdot ah$$



$$S = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin \alpha$$



$$S = \frac{1}{2} \cdot ab$$



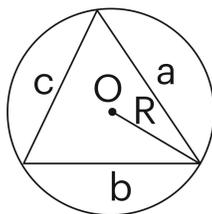
Формула Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

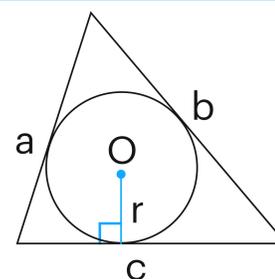
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

— полупериметр
треугольника

$$S = \frac{abc}{4R}$$



$$S = pr$$

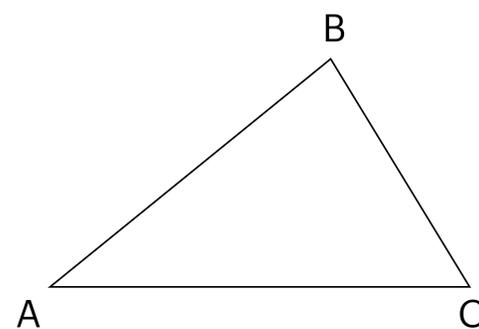


Пример 17

В треугольнике ABC известно, что $AB = 15$, $BC = 8$, $\sin \angle ABC = 5/6$.
Найдите площадь треугольника ABC.

$$S = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 8 \cdot \frac{5}{6} = 50.$$

Ответ:



ТРИГОНОМЕТРИЯ

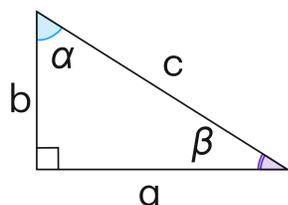
$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

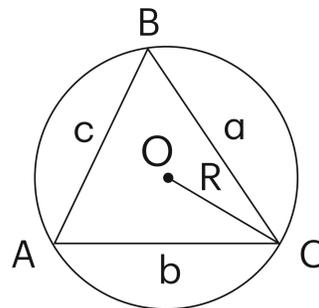


ТЕОРЕМА СИНУСОВ

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R$$

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \angle C$$



ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ:

$$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

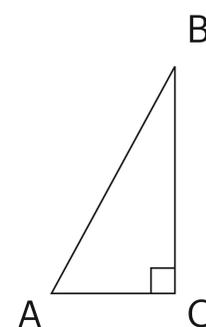
$$\operatorname{tg} (180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Пример 18

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 6$, $AB = 20$. Найдите $\sin B$.

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{20} = 0,3.$$

Ответ:

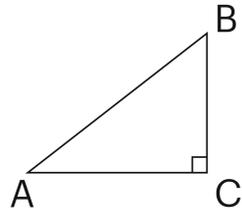


Пример 19

В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos B = 9/14$, $AB = 42$. Найдите BC.

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{9}{14} \Rightarrow$$

$$BC = \frac{AB \cdot 9}{14} = \frac{42 \cdot 9}{14} = 27.$$



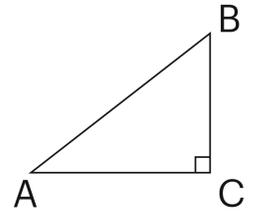
Ответ: 2 7

Пример 20

В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\text{tg} B = 7/4$, $BC = 36$. Найдите AC.

$$\text{tg} B = \frac{AC}{BC} = \frac{7}{4} \Rightarrow$$

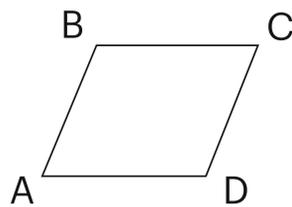
$$AC = \frac{BC \cdot 7}{4} = \frac{36 \cdot 7}{4} = 63.$$



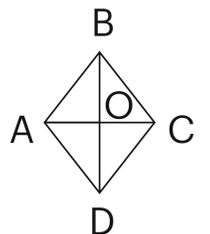
Ответ: 6 3

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

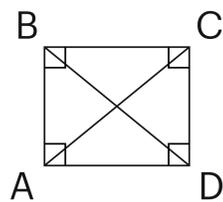
ПАРАЛЛЕЛОГРАММ — это четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны. $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$



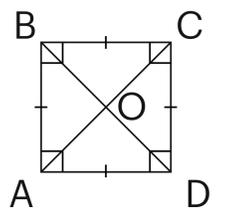
РОМБ — это параллелограмм, у которого все стороны равны.



ПРЯМОУГОЛЬНИК — это параллелограмм, у которого все углы прямые.



КВАДРАТ — это прямоугольник, у которого все стороны равны.



СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Свойства:

1. Диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника ($\triangle ABC = \triangle ADC$, $\triangle ABD = \triangle CDB$).
2. В параллелограмме противоположные стороны и противоположные углы равны.
3. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
4. В параллелограмме сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°.

$AB = CD$
 $BC = AD$

$\angle A = \angle C$
 $\angle B = \angle D$

$BO = DO$
 $AO = CO$

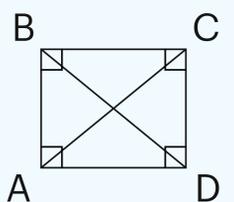
$\angle A + \angle B = 180^\circ$
 $\angle B + \angle C = 180^\circ$
 $\angle C + \angle D = 180^\circ$
 $\angle A + \angle D = 180^\circ$

СВОЙСТВА ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Свойства:

Для прямоугольника справедливы все **свойства** параллелограмма (его противоположные стороны равны, диагонали точкой пересечения делятся пополам).

1. Диагонали прямоугольника равны ($BD = AC$).

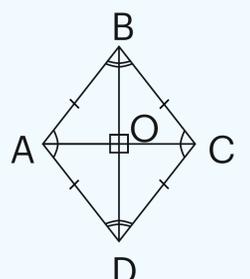


СВОЙСТВА РОМБА

Свойства:

Для ромба справедливы все **свойства** параллелограмма

1. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам. ($\angle BOC = 90^\circ$, $\angle BAC = \angle DAC$, $\angle ABD = \angle CBD$).
2. В ромб можно вписать окружность.

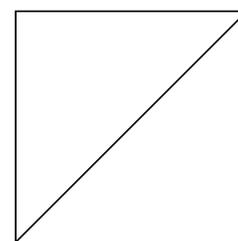


Пример 27

Сторона квадрата равна $9\sqrt{2}$. Найдите диагональ этого квадрата.

По теореме Пифагора: $d^2 = (9\sqrt{2})^2 + (9\sqrt{2})^2 = 81 \cdot 2 + 81 \cdot 2 = 162 + 162 = 324 \Rightarrow d = 18$.

Ответ: 1 8

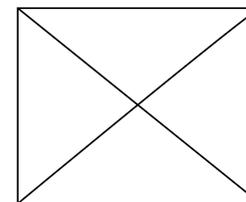


Пример 28

Диагональ прямоугольника образует угол 50° с одной из его сторон. Найдите острый угол между диагоналями этого прямоугольника. Ответ дайте в градусах.

Диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам, а значит, полученные треугольники будут являться равнобедренными. Углы при основании равнобедренного треугольника равны, поэтому получаем треугольник с двумя углами, равными 50° . Найдём третий угол треугольника: $180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$.

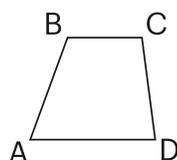
Ответ: 8 0



ТРАПЕЦИЯ

///

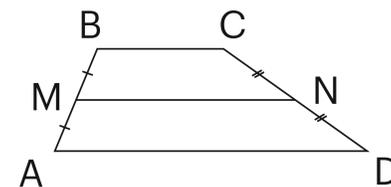
Трапеция — четырёхугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны



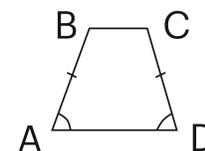
Параллельные стороны — **основания**
Две другие стороны — **боковые**

Средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме.

$$MN = \frac{BC + AD}{2}$$



Равнобедренная трапеция — это трапеция, у которой равны боковые стороны. В равнобедренной трапеции углы при основании и диагонали равны.

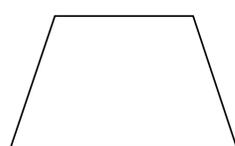


Пример 29

Сумма двух углов равнобедренной трапеции равна 268° . Найдите меньший угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах.

$$268^\circ / 2 = 134^\circ$$

$$180^\circ - 134^\circ = 46^\circ$$



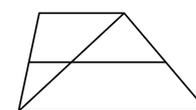
Ответ: 4 6

Пример 30

Основания трапеции равны 17 и 19. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.

$$\text{Меньший отрезок равен } 17 / 2 = 8,5$$

$$\text{Больший отрезок равен } 19 / 2 = 9,5$$



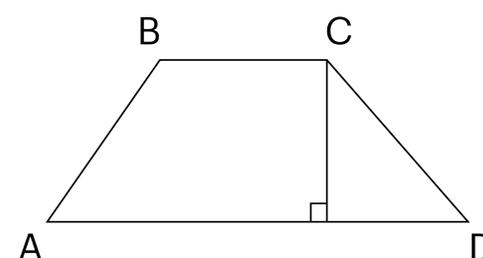
Ответ: 9 , 5

Пример 31

Высота равнобедренной трапеции, проведенная из вершины C, делит основание AD на отрезки длиной 1 и 11. Найдите длину основания BC.

Меньшее основание равнобедренной трапеции равно $11 - 1 = 10$.

Ответ: 1 0



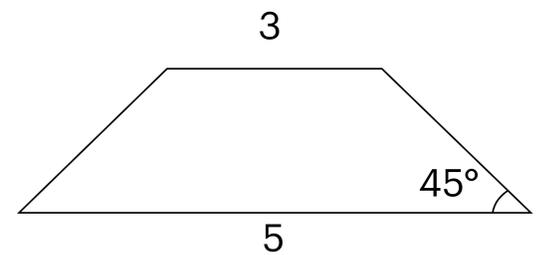
Пример 32

В равнобедренной трапеции основания равны 3 и 5, а один из углов между боковой стороной и основанием равен 45° . Найдите площадь этой трапеции.

Высота равнобедренной трапеции с острым углом 45° при основании равна полуразности оснований трапеции $(5 - 3) / 2 = 1$.

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{3+5}{2} \cdot 1 = 4.$$

Ответ: 4



Пример 33

Биссектриса угла A параллелограмма ABCD пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 7$, $CK = 12$.

Дано:

ABCD — параллелограмм, AK — биссектриса, $BK = 7$, $CK = 12$.

Найти: P.

Решение:

$\angle BAK = \angle KAD$, так как AK — биссектриса.

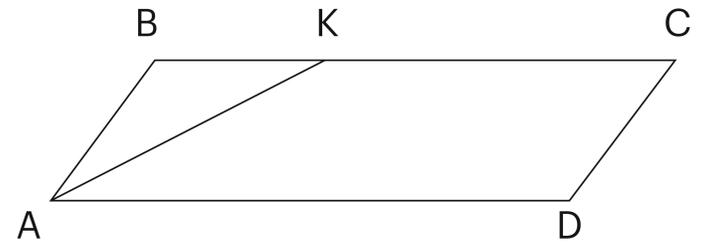
$\angle BKA = \angle KAD$ как накрест лежащие углы при $BC \parallel AD$ (противлежащие стороны пар-ма) и секущей AK.

Значит, $\angle BAK = \angle BKA \Rightarrow \triangle ABK$ — равнобедренный по признаку $\Rightarrow AB = BK = 7$.

$BC = BK + KC = 7 + 12 = 19$.

Так как противоположные стороны параллелограмма равны, то $P = 2 \cdot (AB + BC) = 2 \cdot (7 + 19) = 52$.

Ответ: 52.



для заметок:

