

100 СОТКА



Нокаут / день 4

Математика

Конспект

теория вероятностей, прогрессии №10, №14 · решение
текстовой задачи №21

теория вероятностей, прогрессии, текстовые задачи

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ №10

///

Вероятностью события A при проведении некоторого испытания называют отношение числа m тех исходов, в результате которых наступает событие A , к общему числу n всех (равновозможных между собой) исходов этого испытания

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример 1

В фирме такси в данный момент свободно 30 машин: 6 черных, 3 желтых и 21 зеленая. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчику. Найдите вероятность того, что к нему приедет желтое такси.

$$P = \text{количество желтых} / \text{количество всех}$$

$$P = 3 / 30 = 0,1$$

Ответ: 0 , 1

Пример 2

В среднем из 150 карманных фонариков, поступивших в продажу, восемнадцать неисправных. Найдите вероятность того, что выбранный наудачу в магазине фонарик окажется исправен.

$$150 - 18 = 132 \text{ исправных фонарика}$$

$$P = 132 / 150 = 0,88$$

Ответ: 0 , 8 8

Пример 3

В лыжных гонках участвуют 7 спортсменов из России, 1 спортсмен из Швеции и 2 спортсмена из Норвегии. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен из Швеции.

$$P = 1 / (7 + 1 + 2) = 1 / 10 = 0,1$$

Ответ: 0 , 1

Пример 4

В магазине продается 138 ручек, из них 34 красных, 23 зеленых, 11 фиолетовых, остальные синие и черные, их поровну. Найдите вероятность того, что случайно выбранная ручка будет красной или черной.

$$(138 - 34 - 23 - 11) / 2 = 35 \text{ черных ручек}$$

$$P = (34 + 35) / 138 = 69 / 138 = 0,5$$

Ответ: 0 , 5

///

Событие B называют **противоположным** событию A , если событие B происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A . $P(A) + P(B) = 1$, если A и B — **противоположные**

Пример 5

На экзамене 40 билетов, Саша не выучил 2 из них. Найдите вероятность того, что ему попадет выученный билет.

$$40 - 2 = 38 \text{ выученных билетов}$$

$$P = 38 / 40 = 0,95$$

Ответ: 0 , 9 5

Пример 6

Вероятность того, что новая шариковая ручка пишет плохо (или не пишет), равна 0,29. Покупатель в магазине выбирает одну шариковую ручку. Найдите вероятность того, что эта ручка пишет хорошо.

$$P = 1 - 0,29 = 0,71$$

Ответ: 0 , 7 1

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ №14

///

Арифметическая прогрессия — это последовательность чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и одного и того же числа d (d — **разность прогрессии**)

///

Геометрическая прогрессия — это последовательность чисел, все члены которой отличны от нуля и каждый член которой, начиная со второго, получается умножением его на одно и то же число q (q — **знаменатель геометрической прогрессии**)

Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
Формула n -го члена прогрессии, первый член которой равен a_1 и разность равна d : $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$	Формула n -го члена прогрессии, первый член которой равен b_1 и знаменатель равен q : $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии: $S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1$
Формула для вычисления разности прогрессии: $d = \frac{a_n - a_k}{n - k}, \text{ если } n > k$	

Пример 7

В амфитeatре 15 рядов, причем в каждом следующем ряду на одно и то же число мест больше, чем в предыдущем. В седьмом ряду 36 мест, а в девятом ряду 42 места. Сколько мест в последнем ряду амфитeatра?

$$d = (a_9 - a_7) / (9 - 7) = (42 - 36) / 2 = 3$$

$$a_n = a_k + (n - k) \cdot d$$

$$a_{15} = a_9 + (15 - 9) \cdot d = 42 + 6 \cdot 3 = 60$$

Ответ:

Пример 9

Поезд начал движение от станции. За первую секунду состав сдвинулся на 0,2 м, а за каждую следующую секунду он проходил на 0,6 м больше, чем за предыдущую. Сколько метров состав прошёл за первые 7 секунд движения?

$$a_7 = a_1 + (7 - 1) \cdot d = 0,2 + 6 \cdot 0,6 = 3,8 \text{ м}$$

$$S_7 = (a_1 + a_7) \cdot 7 : 2 = (0,2 + 3,8) \cdot 7 : 2 = 14 \text{ м}$$

Ответ:

Пример 8

При проведении опыта вещество равномерно охлаждали в течение 10 минут. При этом каждую минуту температура вещества уменьшалась на 6°C . Найдите температуру вещества (в градусах Цельсия) через 7 минут после начала проведения опыта, если его начальная температура составляла -9°C .

$$-9 - 6 \cdot 7 = -51$$

Ответ:

Пример 10

Водитель автомобиля начал торможение. За секунду после начала торможения автомобиль проехал 26 м, а за каждую следующую секунду он проезжал на 3 м меньше, чем за предыдущую. Сколько метров автомобиль прошёл за первые 4 секунды торможения?

$$a_4 = a_1 + (4 - 1) \cdot d = 26 + 3 \cdot (-3) = 17 \text{ м}$$

$$S_4 = (a_1 + a_4) \cdot 4 : 2 = (26 + 17) \cdot 4 : 2 = 86 \text{ м}$$

Ответ:

Пример 11

Водитель автомобиля начал торможение. За секунду после начала торможения автомобиль проехал 28 м, а за каждую следующую секунду он проезжал на 4 м меньше, чем за предыдущую. Сколько метров автомобиль прошёл до полной остановки?

Остановка означает, что путь стал равен 0, поэтому найдем n , при котором $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 0$.

$$28 + (n - 1) \cdot (-4) = 0 \Rightarrow n = 8$$

$$S_8 = (a_1 + a_8) \cdot 8 : 2 = (28 + 0) \cdot 8 : 2 = 112 \text{ м.}$$

Ответ:

Пример 12

Каучуковый мячик с силой бросили на асфальт. Отскочив, мячик подпрыгнул на 3,6 м, а при каждом следующем прыжке он поднимался на высоту в два раза меньше предыдущей. При каком по счету прыжке мячик в первый раз не достигнет высоты 25 см?

Первый прыжок: 3,6 м = 360 см

Второй прыжок: 360 : 2 = 180 см

Третий прыжок: 180 : 2 = 90 см

Четвертый прыжок: 90 : 2 = 45 см

Пятый прыжок: 45 : 2 = 22,5 см < 25 см => ответ 5

Ответ:

Пример 13

В ходе биологического эксперимента в чашку Петри с питательной средой поместили колонию микроорганизмов массой 13 мг. За каждые 30 минут масса колонии увеличивается в 3 раза.

Найдите массу колонии микроорганизмов через 90 минут после начала эксперимента.

Ответ дайте в миллиграммах.

1 способ решения:

начальный момент	30 минут	60 минут	90 минут
13 мг	$13 \cdot 3 = 39$ мг	$39 \cdot 3 = 117$ мг	$117 \cdot 3 = 351$ мг

2 способ решения:

$90 / 30 = 3$ раза колония будет увеличиваться; $13 \text{ мг} \cdot 3^3 = 13 \cdot 27 = 351 \text{ мг}$

Ответ:

Пример 14

В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается вдвое каждые 8 минут.

В начальный момент масса изотопа составляла 200 мг. Найдите массу изотопа через 32 минуты.

Ответ дайте в миллиграммах.

1 способ решения:

начальный момент	8 минут	16 минут	24 минуты	32 минуты
200 мг	$200 : 2 = 100$ мг	$100 : 2 = 50$ мг	$50 : 2 = 25$ мг	$25 : 2 = 12,5$ мг

2 способ решения:

$32 / 8 = 4$ раза колония будет увеличиваться; $200 \text{ мг} : 2^4 = 200 : 16 = 12,5 \text{ мг}$

Ответ:

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ №21 С ПОМОЩЬЮ ТАБЛИЦЫ

- 1 нарисовать таблицу на 4 столбика (S, v, t) и несколько строк
- 2 вписать в таблицу «х», исходя из вопроса задач
- 3 по данным задачи заполняем известные ячейки, обязательно проверяя единицы измерения
- 4 оставшийся столбик заполняем по формуле $S = v \cdot t$
- 5 по столбику из шага 4 составляем уравнение
- 6 решаем уравнение

Пример 18

Два автомобиля одновременно отправляются в 400-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 20 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 час раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Пусть x км/ч — скорость второго автомобиля, тогда $(x + 20)$ км/ч — скорость первого, $x > 0$.

автомобиль	v , км/ч	t , ч	S , км
первый	$x + 20$	$\frac{400}{x + 20}$	400
второй	x	$\frac{400}{x}$	400

Так как первый прибывает к финишу на 1 час раньше второго, то

$$\frac{400}{x} - \frac{400}{x + 20} = 1 \quad | \cdot x(x + 20) \text{ при условии, что } x \neq 0 \text{ и } x \neq -20$$

$$400(x + 20) - 400x = x(x + 20)$$

$$400x + 8000 - 400x = x^2 + 20x$$

$$x^2 + 20x - 8000 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 20^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8000) = 400 + 32\,000 = 32\,400$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-20 + 180}{2 \cdot 1} = 80 \text{ км/ч — скорость второго автомобиля.}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-20 - 180}{2 \cdot 1} = -100 \text{ — не удовлетворяет условию } x > 0.$$

$80 + 20 = 100$ км/ч — скорость первого автомобиля.

Ответ: 100 км/ч.

Пример 19

Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставалось 4 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун пробежал первый круг 20 минут назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 11 км/ч меньше скорости второго.

Пусть x км/ч — скорость первого бегуна, тогда $(x + 11)$ км/ч — скорость второго, $x > 0$.

бегун	v , км/ч	t , ч	S , км
первый	x	1	x
второй	$x + 11$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}(x + 11)$

Так как первому бегуну оставалось 4 км до окончания круга, а второй пробежал полный круг, то

$$\frac{2}{3}(x + 11) = x + 4 \quad | \cdot 3$$

$$2(x + 11) = 3x + 12 \Leftrightarrow 2x + 22 = 3x + 12 \Leftrightarrow 3x - 2x = 22 - 12 \Leftrightarrow x = 10 \text{ км/ч.}$$

Ответ: 10 км/ч.

ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ ПО ВОДЕ №21

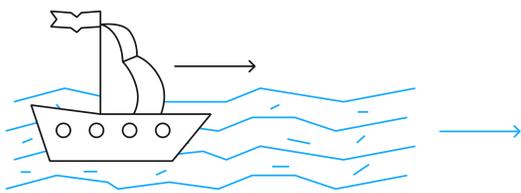
///

Собственная скорость (скорость в неподвижной/стоячей воде) — это скорость объекта без учета скорости течения

Плот может двигаться только по течению, поэтому его скорость будет совпадать со скоростью течения

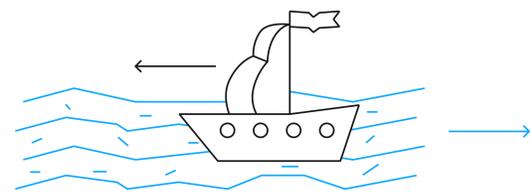
тело движется по течению

Скорость = $V + V_{\text{течения}}$



тело движется против течения

Скорость = $V - V_{\text{течения}}$



Пример 20

Расстояние между пристанями А и В равно 90 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошел 52 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Пусть x км/ч — собственная скорость лодки, $x > 4$ (т. к. скорость против течения равна $x - 4$).

движение по	v , км/ч	t , ч	S , км
по течению	$x + 4$	$\frac{90}{x + 4}$	90
против течения	$x - 4$	$\frac{90}{x - 4}$	90

Плот находился в пути $52/4 = 13$ ч, а лодка на час меньше, поэтому $\frac{90}{x + 4} + \frac{90}{x - 4} = 12$ ($x \neq 4$ и $x \neq -4$)

$$90(x - 4) + 90(x + 4) = 12 \cdot (x + 4)(x - 4) \quad | : 6 \Leftrightarrow 15(x - 4) + 15(x + 4) = 2(x + 4)(x - 4) \Leftrightarrow 15x + 15x = 2x^2 - 32$$

$$2x^2 - 30x - 32 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 15x - 16 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 225 + 64 = 289$$

$$x = \frac{15 + 17}{2 \cdot 1} = 16 \text{ км/ч — собственная скорость баржи. } x = \frac{15 - 17}{2 \cdot 1} = -1 \text{ — не удовлетворяет условию } x > 4.$$

Ответ: 16 км/ч.

Пример 23

Имеются два сосуда, содержащие 30 кг и 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 81% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 83% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором растворе?

Пусть концентрация первого раствора равна $x\%$, а второго — $y\%$.

1 случай:

	м раствора	концентрация	м вещества
раствор 1	30 кг	$x\% = 0,01x$	$0,01x \cdot 30 = 0,3x$ кг
раствор 2	20 кг	$y\% = 0,01y$	$0,01y \cdot 20 = 0,2y$ кг
раствор 3	$30 + 20 = 50$ кг	$81\% = 0,81$	$0,81 \cdot 50 = 40,5$ кг

Составим уравнение: $0,3x + 0,2y = 40,5 \mid \cdot 10 \Leftrightarrow 3x + 2y = 405$ (*)

2 случай: Пусть взяли по 1 кг обоих растворов.

	м раствора	концентрация	м вещества
раствор 1	1 кг	$x\% = 0,01x$	$0,01x \cdot 1 = 0,01x$ кг
раствор 2	1 кг	$y\% = 0,01y$	$0,01y \cdot 1 = 0,01y$ кг
раствор 3	$1 + 1 = 2$ кг	$83\% = 0,83$	$0,83 \cdot 2 = 1,66$ кг

Составим уравнение: $0,01x + 0,01y = 1,66 \mid \cdot 100 \Leftrightarrow x + y = 166$ (**)

Из уравнений (*) и (**) составим систему: $\begin{cases} 3x + 2y = 405, \\ x + y = 166 \mid \cdot 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 405, \\ 2x + 2y = 332 \end{cases}$

$$3x + 2y - 2x - 2y = 405 - 332$$

$$x = 73$$

$$\begin{cases} x = 73, \\ y = 166 - 73 = 93. \end{cases}$$

Тогда масса кислоты во втором растворе равна $0,93 \cdot 20 = 18,6$ кг

Ответ: 18,6 кг.

для заметок:



Источник: Открытый банк заданий ФИПИ

МАТЕМАТИКА С МАРИЕЙ СТРЕЛЬЦОВОЙ, TG: @OGEMATH100