сотка

Нокаут / день 5 Математика

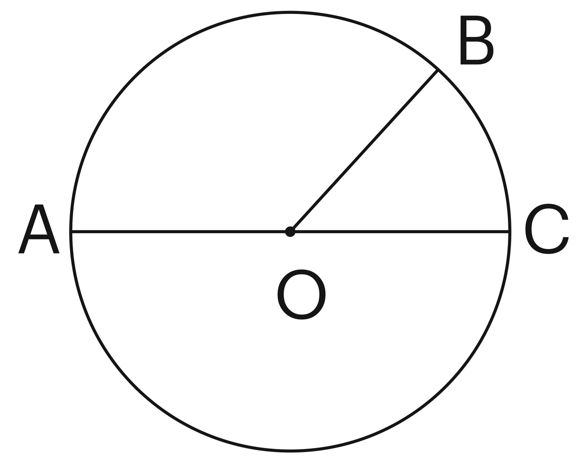
Конспект

углы в окружности, хорда, касательная, секущая, вписанная и описанная окружности №16 · решение задач второй части №23 - №25

окружности и геометрия второй части

ОКРУЖНОСТЬ №16

///
Окружность — это геометрическая фигура, которая состоит из множества точек, расположенных на заданном расстоянии от данной точки (центра окружности)



///
Хорда — это отрезок, соединяющий две точки на окружности

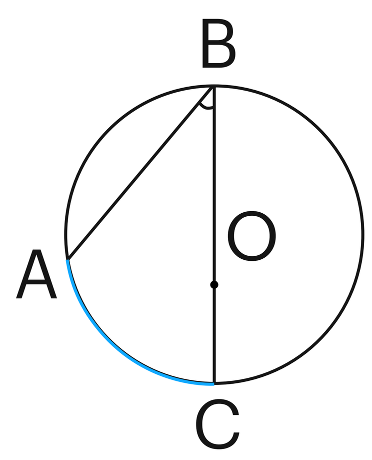
///
Радиус окружности — это отрезок, соединяющий центр и точку на окружности (все радиусы одной окружности равны)

///
Диаметр окружности — это хорда, проходящая через центр окружности (диаметр в два раза больше радиуса окружности: D = 2R)

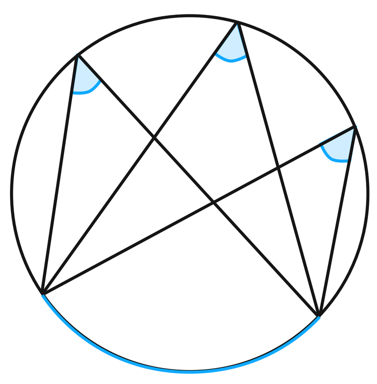
///
Дуга окружности — это одна из двух частей окружности, на которые её разбивают две различные принадлежащие ей точки

ВПИСАННЫЕ И ЦЕНТРАЛЬНЫЕ УГЛЫ

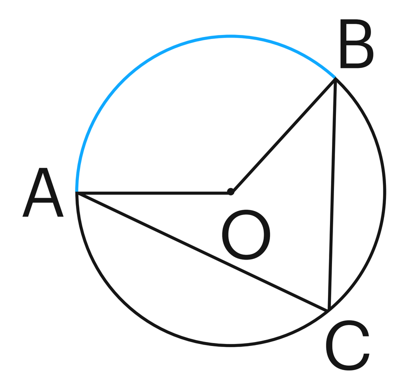
ВПИСАННЫЙ УГОЛ — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность. **Вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую опирается.**
$\angle ABC = 1/2 \cdot \smile AC$



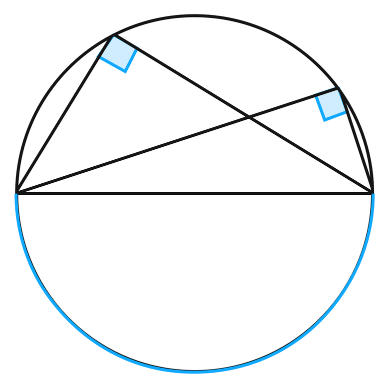
Если два вписанных угла опираются на одну дугу, они равны.



ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УГОЛ — угол, вершина которого совпадает с центром окружности. **центральный угол вдвое больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу.**
$\angle AOB = \smile AB = 2 \cdot \angle ACB$



Если вписанный угол опирается на диаметр (полуокружность), то он прямой.

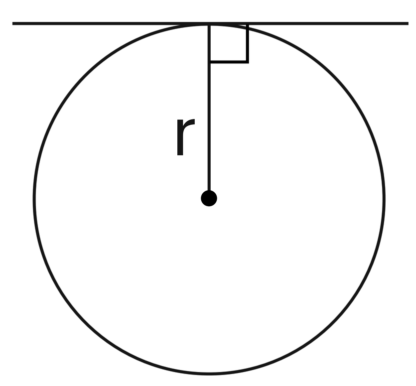


ХОРДА, КАСАТЕЛЬНАЯ, СЕКУЩАЯ

///
Касательная — это прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку (точку касания)

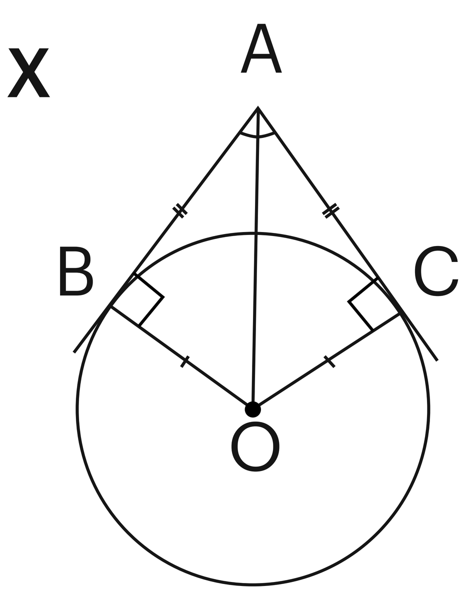
КАСАТЕЛЬНАЯ И РАДИУС

Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.
Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.



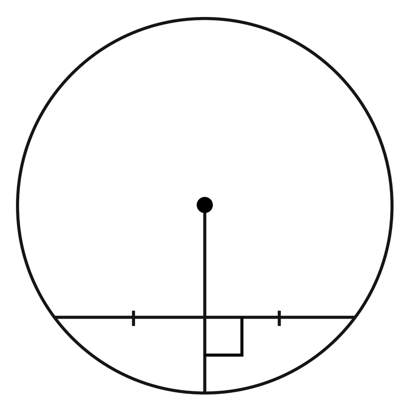
СВОЙСТВО ОТРЕЗКОВ КАСАТЕЛЬНЫХ

Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.
$AB = AC$, $\angle BAO = \angle CAO$



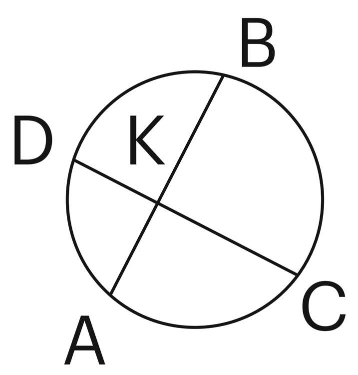
РАДИУС И ХОРДА

Если радиус перпендикулярен хорде, то точкой пересечения он делит её пополам.
Если радиус делит хорду пополам, то он ей перпендикулярен.



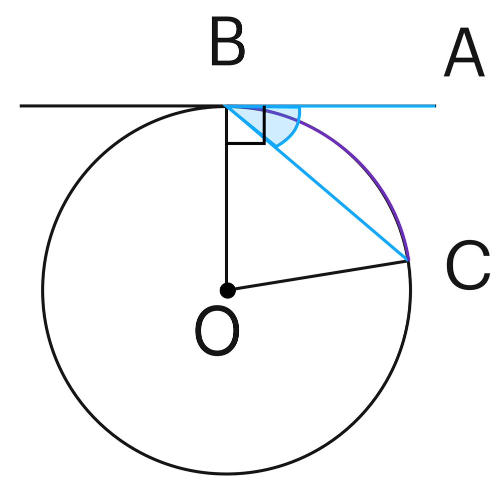
ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

хорды



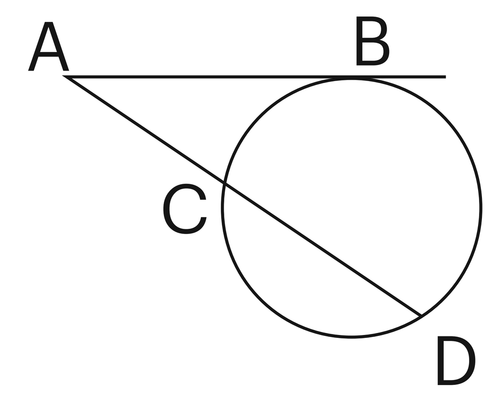
$AK \cdot KB = DK \cdot KC$

касательная и хорда



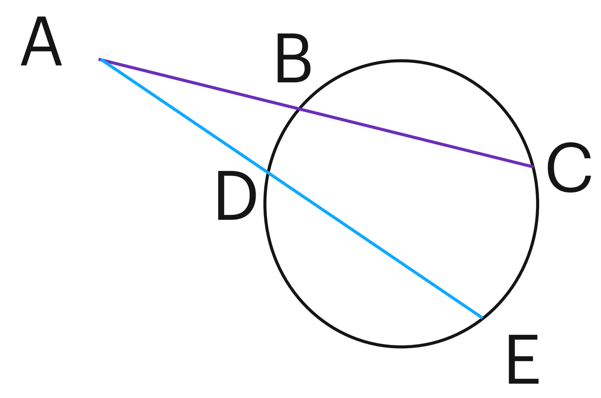
$\angle ABC = 1/2 \cdot \smile BC$

касательная и секущая



$AB^2 = AC \cdot AD$

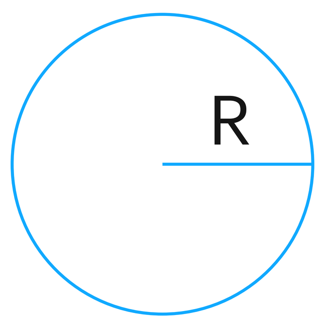
секущие



$AB \cdot AC = AD \cdot AE$

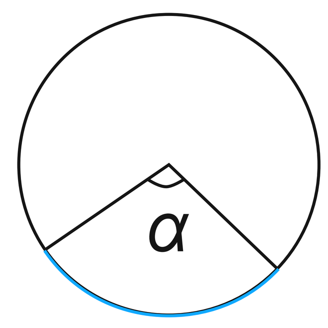
ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ДУГИ, ПЛОЩАДЬ КРУГА И СЕКТОРА

длина окружности C



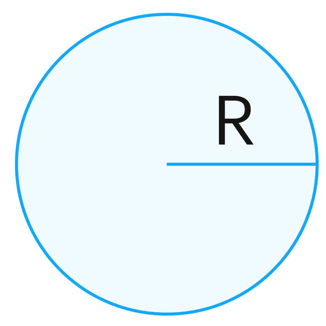
$C = 2\pi R$,
где R — радиус окружности.

длина дуги L



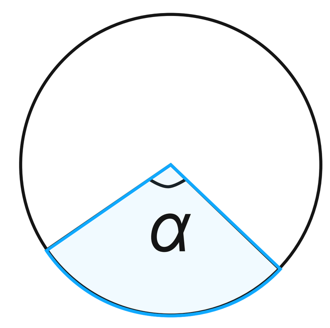
$L = C \cdot \alpha/360°$,
где α — градусная мера дуги.

площадь круга S



$S = \pi R^2$,
где R — радиус окружности.

площадь сектора Sc

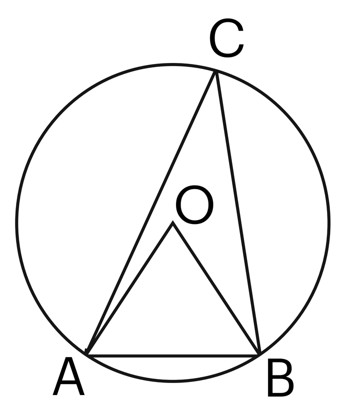


$Sc = S \cdot \alpha/360°$,
где α — градусная мера дуги.

Пример 1

Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Точки O и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB. Найдите $\angle ACB$, если $\angle AOB = 153°$. Ответ дайте в градусах.

$\angle AOB = \smile AB = 153°$
$\angle ACB = 1/2 \cdot \smile AB = 1/2 \cdot 153° = 76{,}5°$

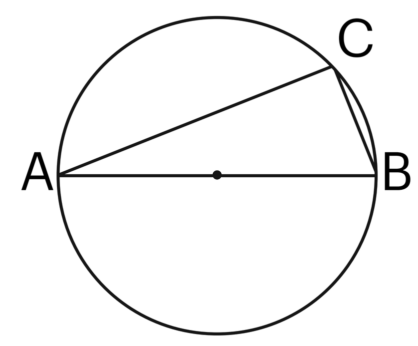


Ответ: 7 6 , 5

Пример 2

Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне AB. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 30°. Ответ дайте в градусах.

$\angle ACB = 90°$, как вписанный угол, опирающийся на диаметр
$\angle ABC = 180° - \angle BAC - \angle ACB$
$\angle ABC = 180° - 30° - 90° = 60°$

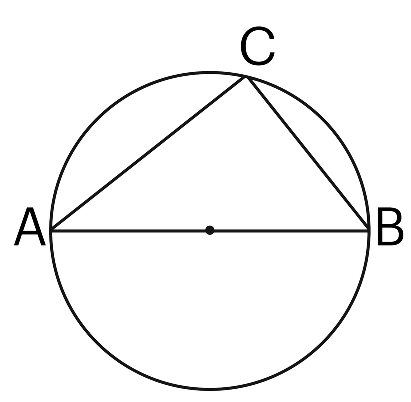


Ответ: 6 0

Пример 3

Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне AB. Радиус окружности равен 10. Найдите BC, если AC = 16.

$AB = 2 \cdot 10 = 20$ (диаметр окружности)
$\angle ACB = 90°$, как вписанный угол, опирающийся на диаметр
$AB^2 = BC^2 + AC^2$
$BC^2 = AB^2 - AC^2 = 20^2 - 16^2 = 144;$
$BC = 12$

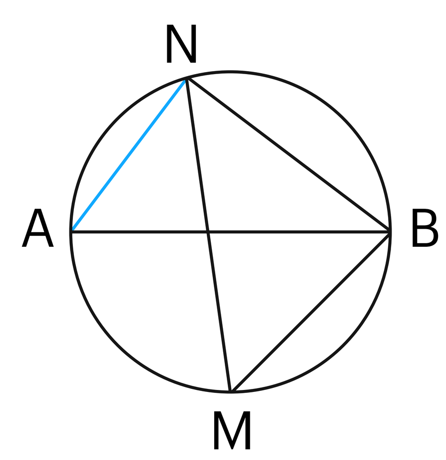


Ответ: 1 2

Пример 4

На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N. Известно, что $\angle NBA = 34°$. Найдите угол NMB. Ответ дайте в градусах.

$\angle ANB = 90°$, как вписанный угол, опирающийся на диаметр
$\angle NAB = 180° - \angle NBA - \angle ANB$
$\angle NAB = 180° - 34° - 90° = 56°$
$\angle NMB = \angle NAB = 56°$, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу

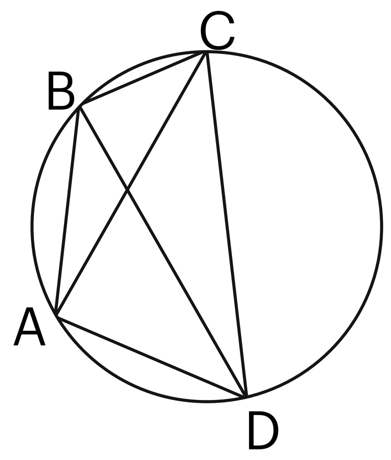


Ответ: 5 6

Пример 5

Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен 134°, угол CAD равен 81°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.

$\angle CBD = \angle CAD = 81°$, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу
$\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD$
$\angle ABD = 134° - 81° = 53°$

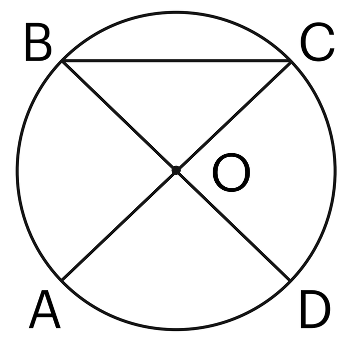


Ответ: 5 3

Пример 6

В окружности с центром в точке O отрезки AC и BD — диаметры. Угол AOD равен 114°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.

$\angle BOC = \angle AOD = 114°$ (вертикальные углы)
BO = CO как радиусы одной окружности, значит, $\triangle BOC$ — равнобедренный и
$\angle ACB = \angle DBC = (180° - \angle BOC) / 2$
$\angle ACB = (180° - 114°) / 2 = 66° / 2 = 33°$

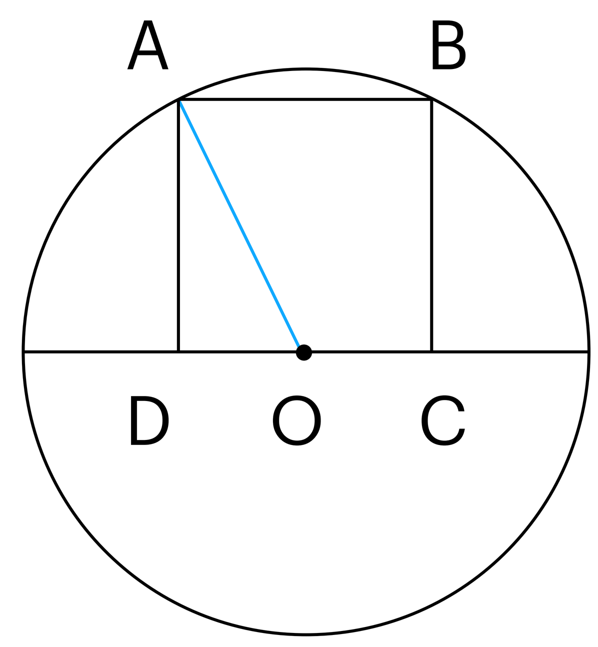


Ответ: 3 3

Пример 7

Точка O является серединой стороны CD квадрата ABCD. Радиус окружности с центром в точке O, проходящей через вершину A, равен 5. Найдите площадь квадрата ABCD.

Пусть DO = CO = x (т.к. O — середина), тогда AD = 2x.
По т. Пифагора: $AO^2 = AD^2 + DO^2$
$5^2 = (2x)^2 + x^2$
$25 = 5x^2$; $x^2 = 5$
$S = AD^2 = (2x)^2 = 4x^2 = 4 \cdot 5 = 20$



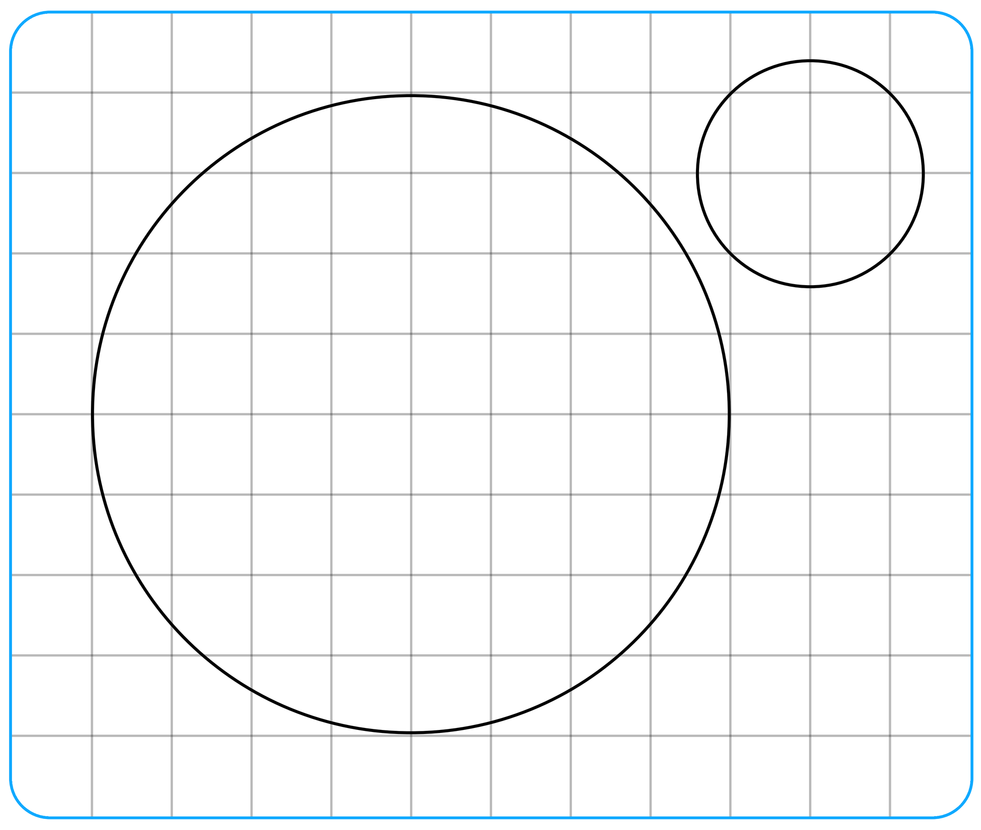
Ответ: 2 0

Пример 8

На клетчатой бумаге изображены два круга. Во сколько раз площадь большего круга больше площади меньшего?

Радиус большей окружности найдем по клеточкам: $R_1 = 4$, радиус меньшей — по т. Пифагора:
$r_2^2 = 1^2 + 1^2 = 2$
$r_2 = \sqrt{2}$

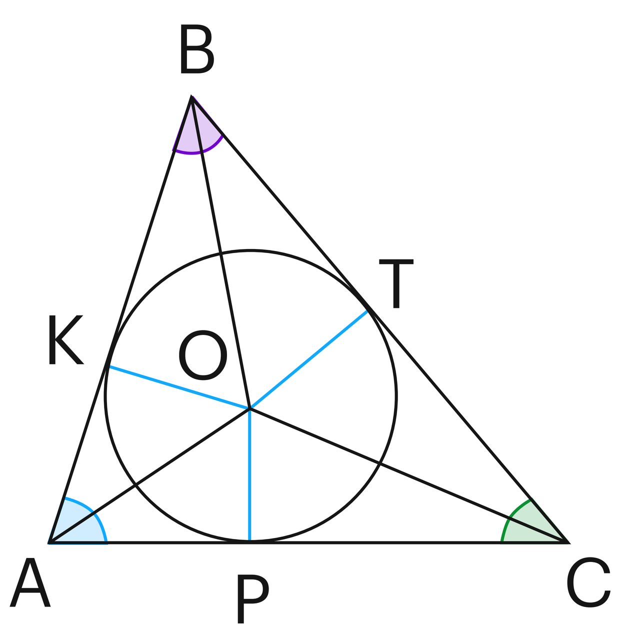
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi r_2^2} = \frac{R_1^2}{r_2^2} = \frac{4^2}{(\sqrt{2})^2} = \frac{16}{2} = 8$$



Ответ: 8

ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК №16

///
Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называют **вписанной**, а многоугольник — **описанным** около этой окружности

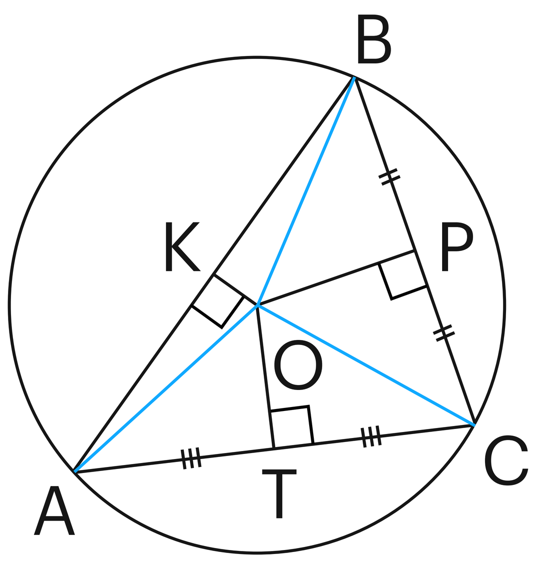


В любой треугольник можно вписать только одну окружность.

Центр окружности, вписанной в треугольник, — точка пересечения биссектрис углов треугольника.

ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА №16

///
Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называют **описанной**, а многоугольник — **вписанным** в эту окружность

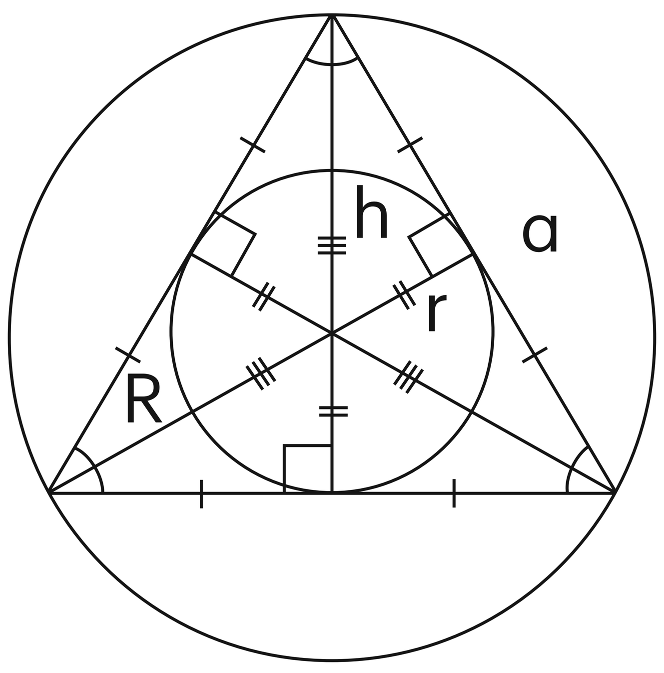


Около любого треугольника можно описать только одну окружность.

Центр окружности, описанной около треугольника, — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

В остроугольном треугольнике центр лежит внутри треугольника, в прямоугольном — на середине гипотенузы, в тупоугольном — снаружи треугольника.

РАВНОСТОРОННИЙ (ПРАВИЛЬНЫЙ) ТРЕУГОЛЬНИК

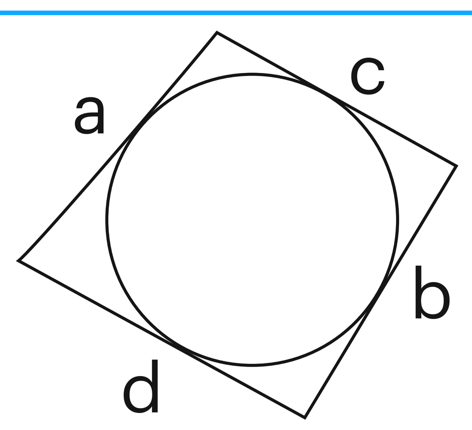


$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $R = 2r$ $h = R + r = 3r$

СВОЙСТВО И ПРИЗНАК ОПИСАННОГО ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА

свойство

В любом описанном четырёхугольнике суммы длин противоположных сторон равны.
$a + b = c + d$



признак

Если суммы длин противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.

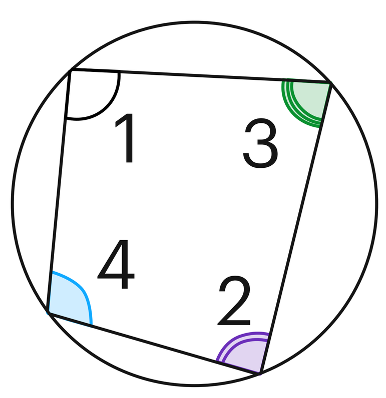
Пример: квадрат, ромб.

СВОЙСТВО И ПРИЗНАК ВПИСАННОГО ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА

свойство

В любом вписанном четырёхугольнике сумма противолежащих углов равна 180°.

$\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 3 + \angle 4 = 180°$

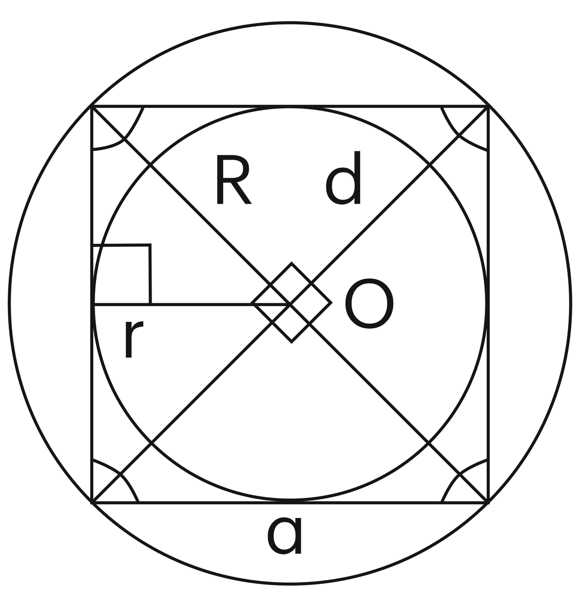


признак

Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

Пример: прямоугольник, квадрат, равнобедренная трапеция.

КВАДРАТ



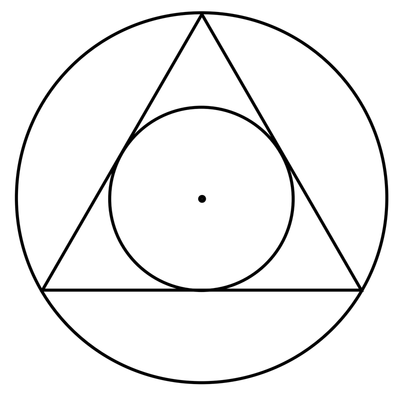
$d = a\sqrt{2}$ $R = \frac{d}{2}$ $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ $R = r\sqrt{2}$ $r = \frac{a}{2}$

Пример 9

Сторона равностороннего треугольника равна $8\sqrt{3}$. Найдите **а)** радиус окружности, описанной около этого треугольника; **б)** радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

а) $R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} = 8$

б) $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{6} = 4$



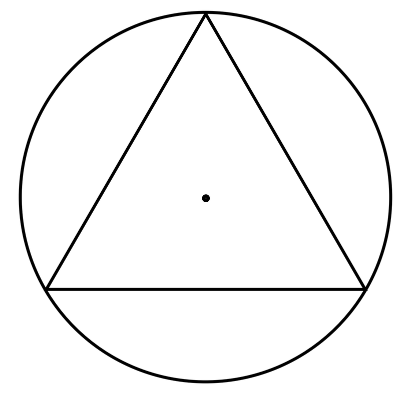
Ответ: а) 8; б) 4.

Пример 10

Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен $9\sqrt{3}$. Найдите длину стороны этого треугольника.

$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 9\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$9 = \frac{a}{3} \Rightarrow a = 9 \cdot 3 = 27$

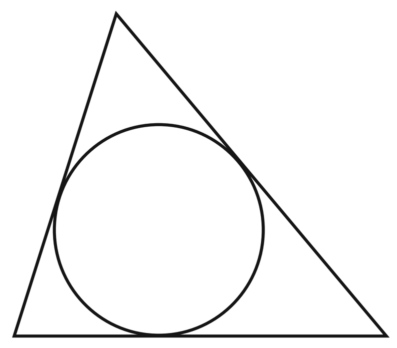


Ответ: 2 7

Пример 11

Периметр треугольника равен 60, одна из сторон равна 12, а радиус вписанной в него окружности равен 3. Найдите площадь этого треугольника.

$S = pr$
$p = 60 / 2 = 30$
$S = 30 \cdot 3 = 90$



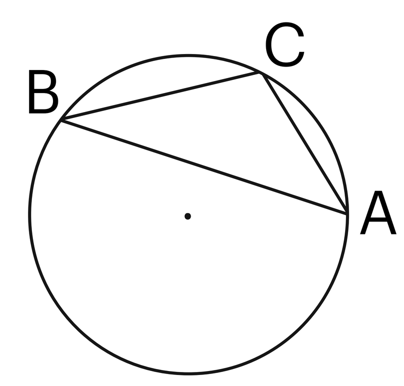
Ответ: 9 0

Пример 12

В треугольнике ABC угол C равен 120°, $AB = 22\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

По т. синусов: $\frac{AB}{\sin\angle C} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2\sin\angle C}$

$R = \frac{22\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3}/2} = \frac{22}{1} = 22$

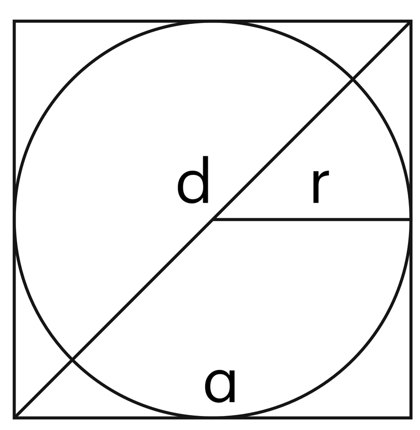


Ответ: 2 2

Пример 13

Радиус вписанной в квадрат окружности равен $8\sqrt{2}$. Найдите **а)** диагональ этого квадрата; **б)** его площадь.

Сторона квадрата равна $2 \cdot 8\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$
По т. Пифагора: $d^2 = (16\sqrt{2})^2 + (16\sqrt{2})^2$
а) $d^2 = 512 + 512 = 1024 \Rightarrow d = 32$
б) $S = (16\sqrt{2})^2 = 512$

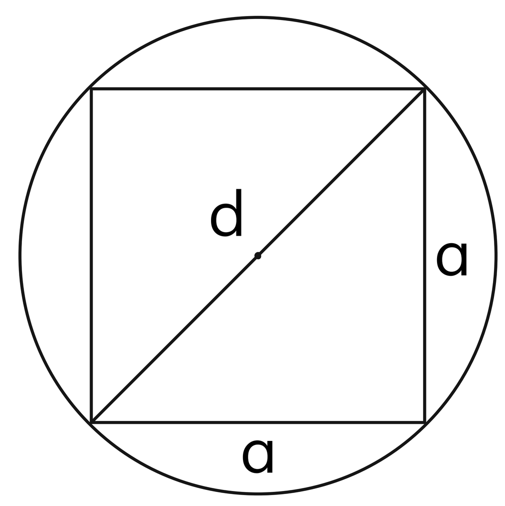


Ответ: а) 32; б) 512.

Пример 14

Сторона квадрата равна $4\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.

По т. Пифагора: $d^2 = (4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2$
$d^2 = 32 + 32 = 64 \Rightarrow d = 8$
$R = d/2 = 8 / 2 = 4$

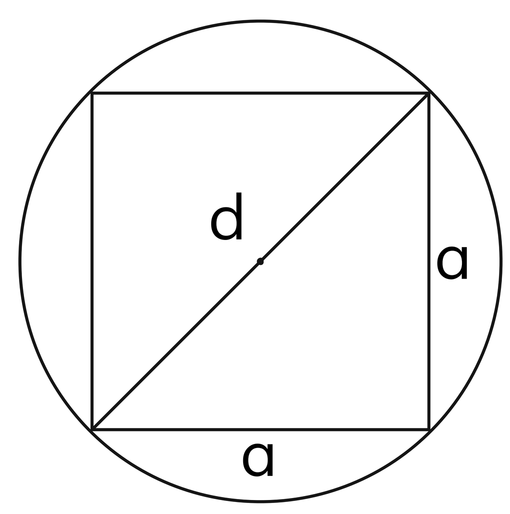


Ответ: 4

Пример 15

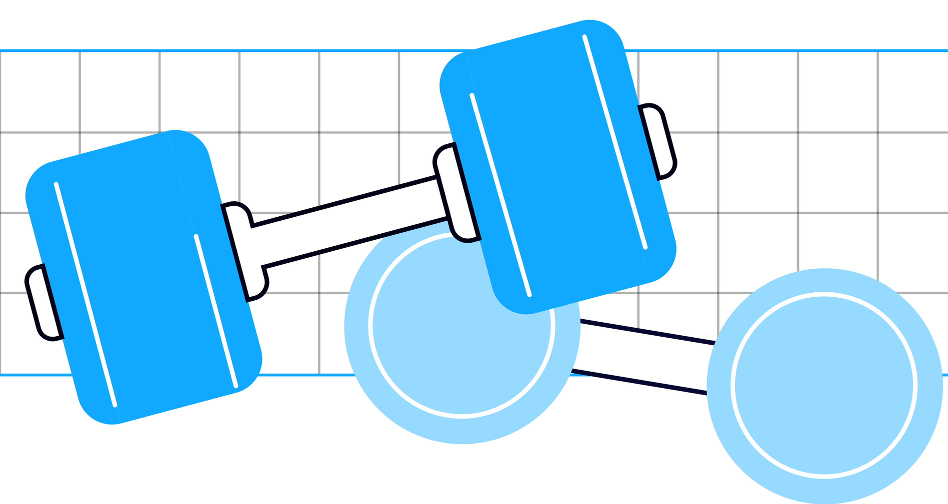
Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $26\sqrt{2}$. Найдите длину стороны этого квадрата.

$R = d/2 \Rightarrow d = 2 \cdot 26\sqrt{2} = 52\sqrt{2}$
По т. Пифагора: $(52\sqrt{2})^2 = a^2 + a^2$
$52^2 \cdot 2 = 2a^2$
$a^2 = 52^2$
$a = 52$



Ответ: 5 2

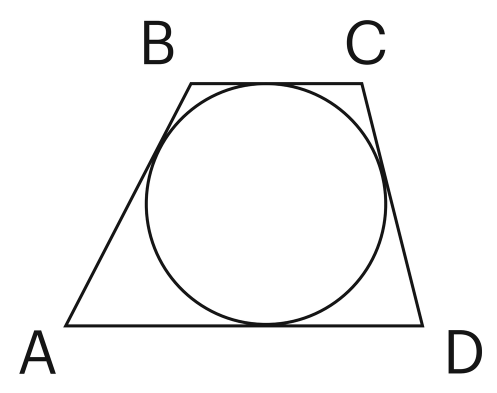
для заметок:



Пример 16

Трапеция ABCD с основаниями AD и BC описана около окружности, AB = 18, BC = 9, CD = 13. Найдите AD.

По свойству описанного четырехугольника:
AD + BC = AB + CD
AD = AB + CD – BC
AD = 18 + 13 – 9 = 22

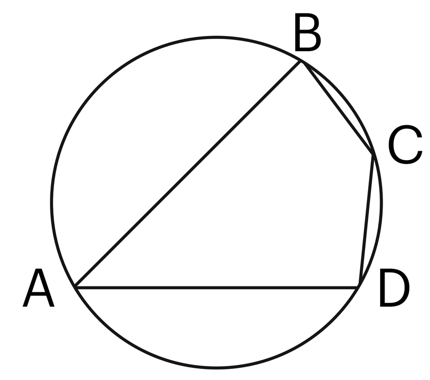


Ответ: 2 2

Пример 17

Угол A четырехугольника ABCD, вписанного в окружность, равен 37°. Найдите угол C этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.

По свойству вписанного четырехугольника:
$\angle A + \angle C = 180°$
$\angle C = 180° - \angle A$
$\angle C = 180° - 37° = 143°$

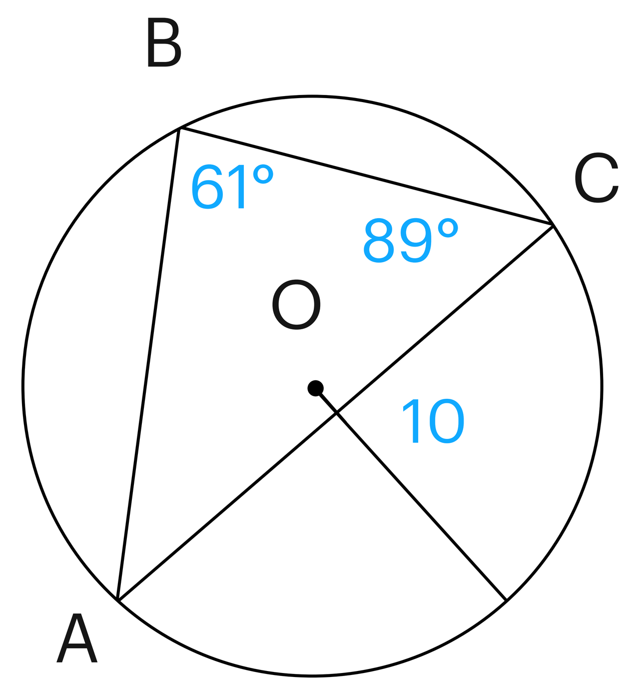


Ответ: 1 4 3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ВТОРОЙ ЧАСТИ №23 – 25

Пример 18

Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 61° и 89°. Найдите BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 10.



Дано:
$\triangle ABC$, $\angle B = 61°$, $\angle C = 89°$, $R = 10$
окружность, описанная около $\triangle ABC$

Найти: BC.

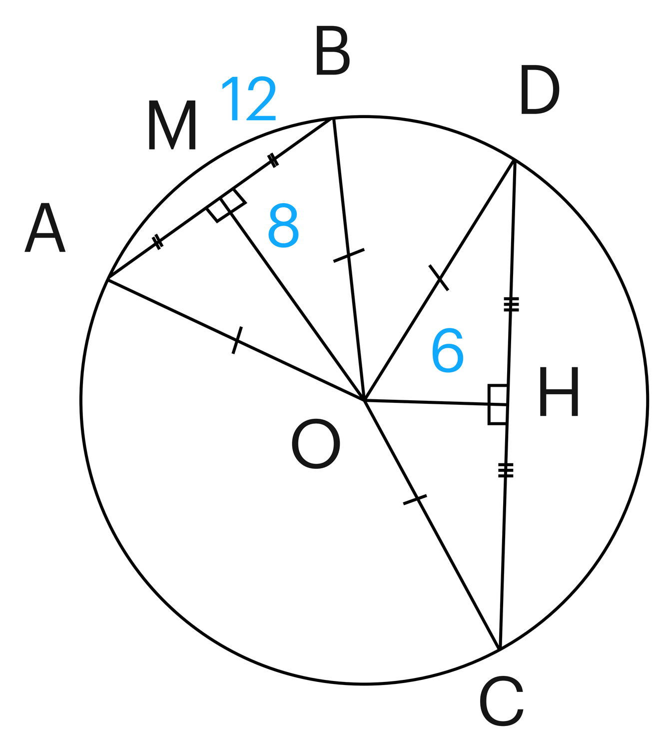
Решение:
$\angle A = 180° - (\angle B + \angle C) = 180° - (61° + 89°) = 30°$ по теореме о сумме углов треугольника

По теореме синусов: $\frac{BC}{\sin\angle A} = 2R \Rightarrow BC = 2R \cdot \sin\angle A = 2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 10$

Ответ: 10.

Пример 19

Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD, если AB = 12, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 8 и 6.



Дано:
AB и CD — хорды окружности, AB = 12, OM = 8, OH = 6.

Найти: CD.

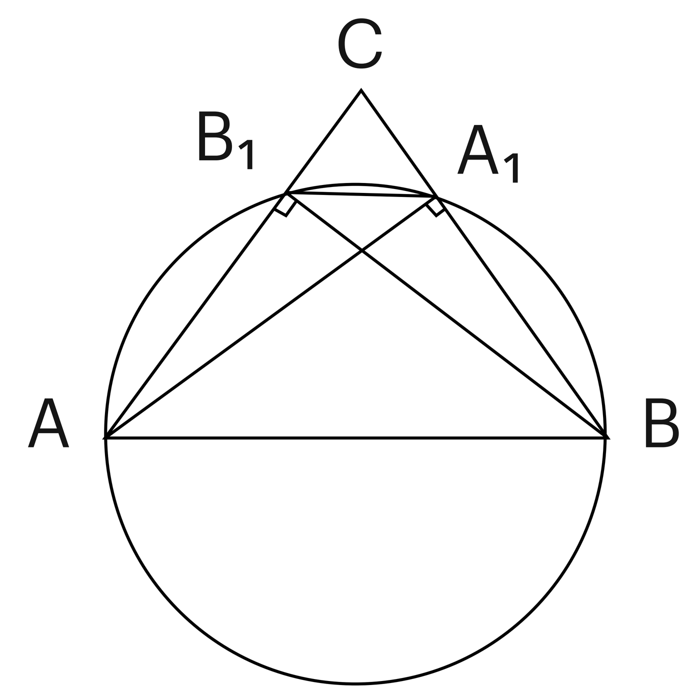
Решение:
Построим AO, BO, CO, DO — радиусы окружности, тогда AO = BO = CO = DO и $\triangle AOB$, $\triangle COD$ — равнобедренные.

$\angle BMO = 90°$ (так как $OM \perp AB$) => $\triangle BMO$ — прямоугольный и OM — высота $\triangle AOB$.
Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является его медианой, поэтому AM = MB = AB / 2 = 12 / 2 = 6.
В $\triangle BMO$ по теореме Пифагора: $BO^2 = OM^2 + MB^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \Rightarrow BO = 10 \Rightarrow CO = 10$.

$\angle CHO = 90°$ (так как $OH \perp CD$) => $\triangle CHO$ — прямоугольный и OH — высота $\triangle COD$.
В $\triangle CHO$ по теореме Пифагора: $CH^2 = CO^2 - OH^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow CH = 8$.
Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является его медианой, поэтому CH = DH = 8, CD = CH + DH = 8 + 8 = 16.

Ответ: 16.

Пример 20



В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1.
Докажите, что углы BB_1A_1 и BAA_1 равны.

Дано:
$\triangle ABC$, AA_1 и BB_1 — высоты

Доказать: $\angle BB_1A_1 = \angle BAA_1$.

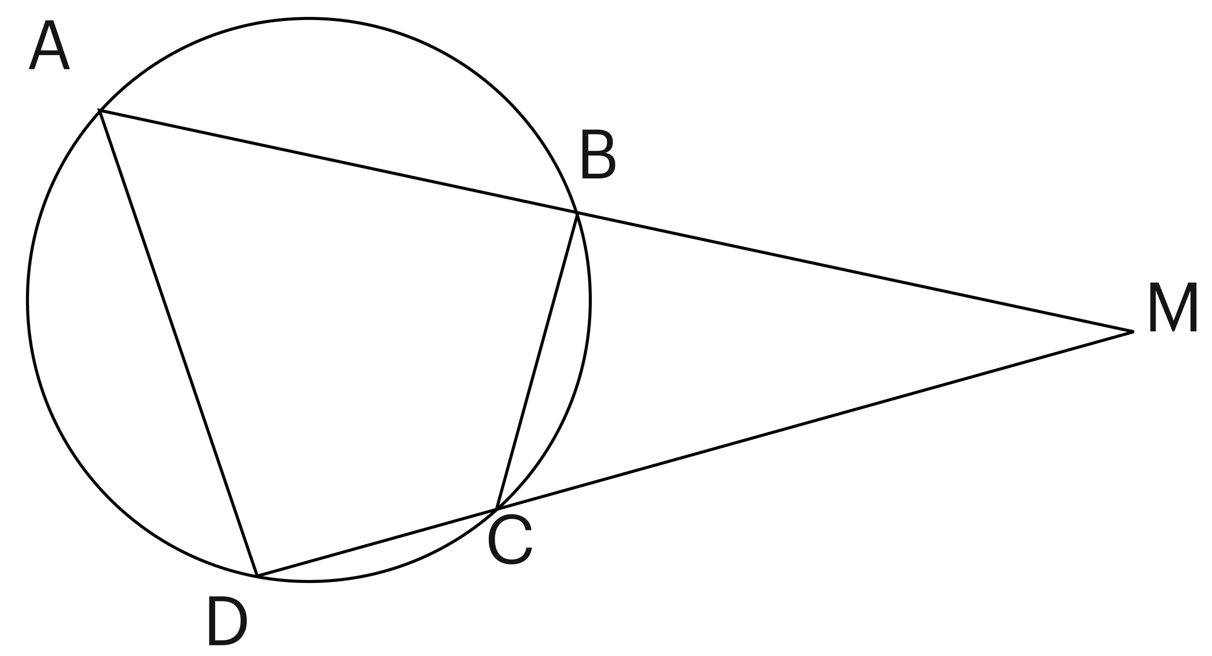
Доказательство:
Так как $\triangle AB_1B$ — прямоугольный (BB_1 — высота), то вокруг $\triangle AB_1B$ можно описать окружность с диаметром AB (радиус равен $1/2 \cdot AB$).

Так как $\triangle AA_1B$ — прямоугольный (AA_1 — высота), то вокруг $\triangle AA_1B$ можно описать окружность с диаметром AB (радиус равен $1/2 \cdot AB$).

Значит, точки A, B_1, A_1, B лежат на одной окружности.
$\angle BB_1A_1$ — вписанный, $\angle BB_1A_1 = 1/2 \cdot \smile BA_1$
$\angle BAA_1$ — вписанный, $\angle BAA_1 = 1/2 \cdot \smile BA_1$. Значит, $\angle BB_1A_1 = \angle BAA_1$ **ч.т.д.**

Пример 21

Известно, что около четырёхугольника ABCD можно описать окружность и что продолжения сторон AB и CD четырёхугольника пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.



Дано:
ABCD — вписанный четырехугольник,
продолжения AB и CD пересекаются в точке M

Доказать: $\triangle MBC \sim \triangle MDA$.

Доказательство:

По свойству смежных углов $\angle ABC + \angle MBC = 180°$.
По свойству вписанного четырехугольника $\angle ADC + \angle ABC = 180°$.
Значит, $\angle ADC = \angle MBC$.

Рассмотрим $\triangle MBC$ и $\triangle MDA$:
1. $\angle MBC = \angle MDA$;
2. $\angle M$ — общий;

Значит, $\triangle MBC \sim \triangle MDA$ (по двум углам) **ч.т.д.**

Пример 22

В трапеции ABCD боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если AD = 12, BC = 10.

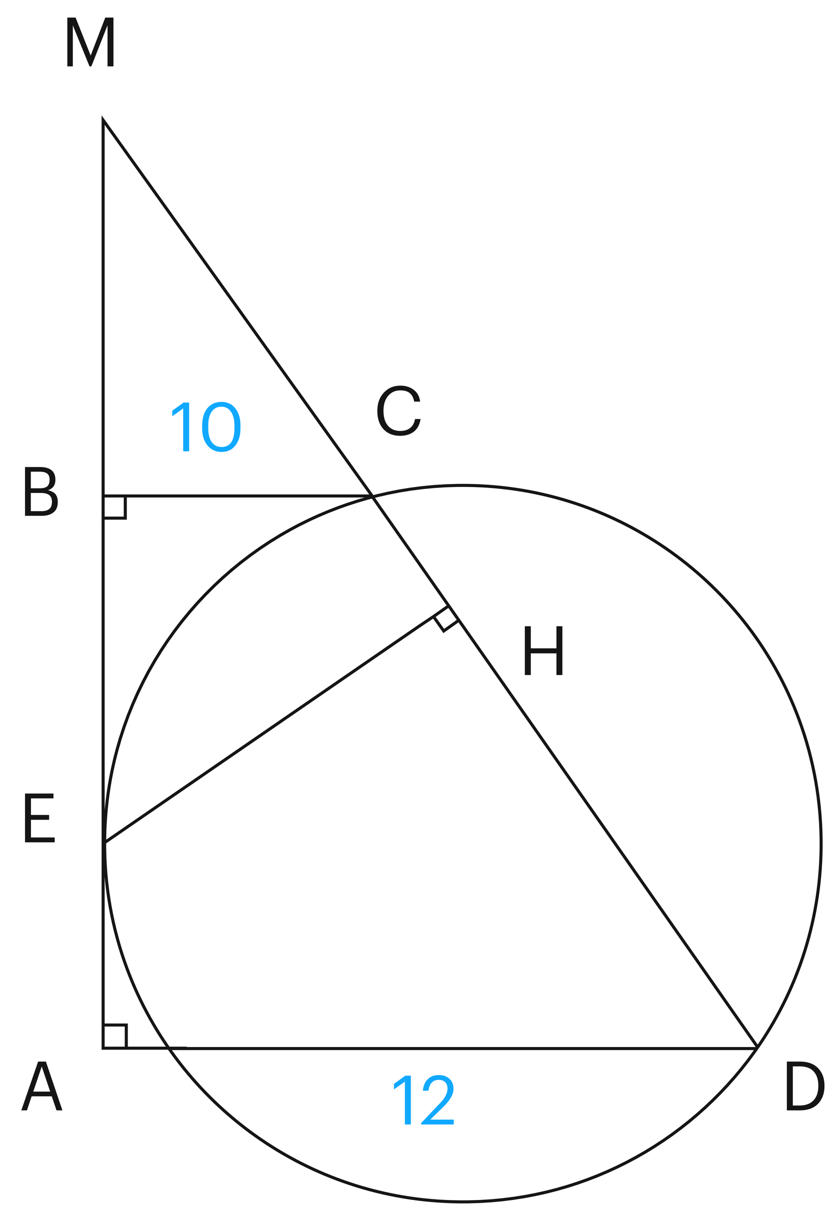
Дано:
ABCD — прямоугольная трапеция, окружность, проходящая через точки C, D и касающаяся AB в точке E, BC = 10, AD = 12.

Найти: EH.

Решение:
Продолжим боковые стороны трапеции за точки B и C до пересечения в точке M.
Построим EH — перпендикуляр к CD, тогда это и есть искомое расстояние и $\angle MHE = 90°$.
Так как трапеция прямоугольная, то $\angle ABC = \angle BAD = 90° \Rightarrow \angle MBC = 90°$.

Рассмотрим $\triangle MBC$ и $\triangle MAD$:
1. $\angle MBC = \angle MAD = 90°$;
2. $\angle BMC$ — общий;

Значит, $\triangle MBC \sim \triangle MAD$ по двум углам => $\frac{MC}{MD} = \frac{BC}{AD} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$



Пусть $MC = 5x$, тогда $MD = 6x$.

Рассмотрим $\triangle MBC$ и $\triangle MHE$:
1. $\angle MBC = \angle MHE = 90°$;
2. $\angle BMC$ — общий;

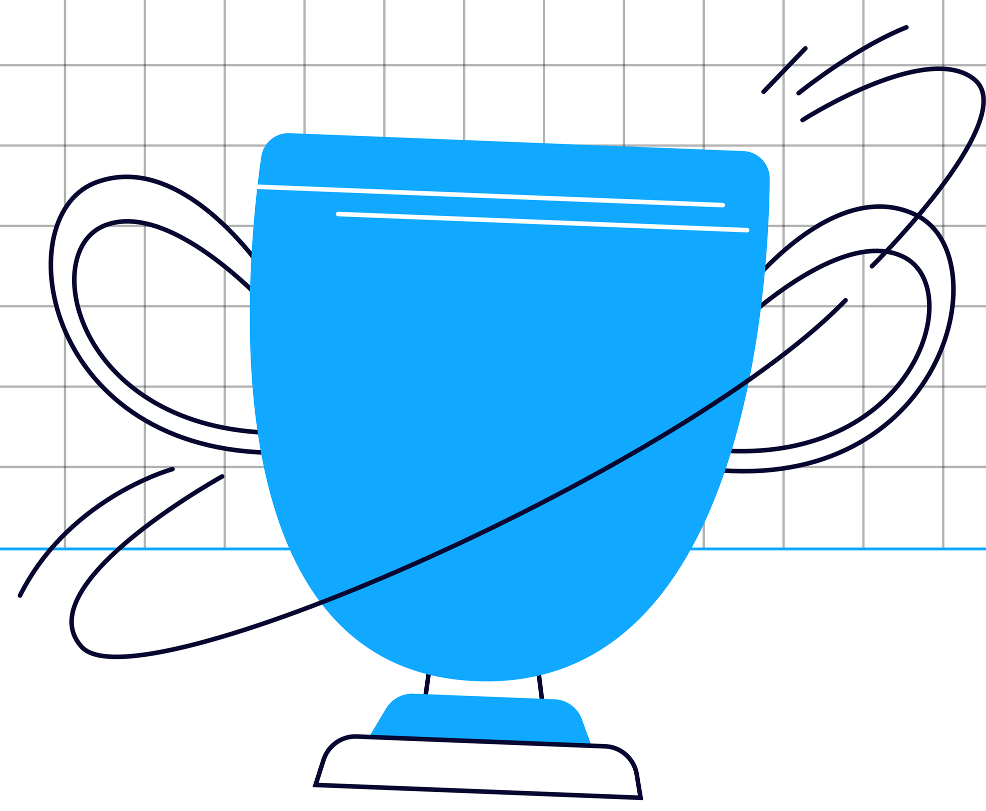
Значит, $\triangle MBC \sim \triangle MHE$ по двум углам => $\frac{EH}{BC} = \frac{ME}{MC}$ => $EH = \frac{ME \cdot BC}{MC}$

$ME^2 = MC \cdot MD$ по теореме о касательной и секущей
$ME^2 = 5x \cdot 6x$
$ME^2 = 30x^2$
$ME = x \cdot \sqrt{30}$.

$EH = \frac{ME \cdot BC}{MC} = \frac{\sqrt{30}x \cdot 10}{5x} = 2\sqrt{30}$.

Ответ: $2\sqrt{30}$.

для заметок:



Источник: Открытый банк заданий ФИПИ