

100 сотка



Нокаут / день 6

Математика

Конспект

функции №11 · функции №22

функции в первой и второй части

///

Функция — это правило, которое каждому значению независимой переменной ставит в соответствие единственное значение зависимой переменной: $y = f(x)$

Названия переменных:

Обычно независимую переменную обозначают буквой x (аргумент функции); зависимую — буквой y (значение функции), функцию (правило) — буквой f .

Названия осей:

ось Ox — ось абсцисс;
ось Oy — ось ординат

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

с помощью формулы

Примеры:
 $y = x + 2$
 $y = x^2$

с помощью таблицы

Чтобы заполнить таблицу, нужно выбрать значение « x » и рассчитать для него « y ».

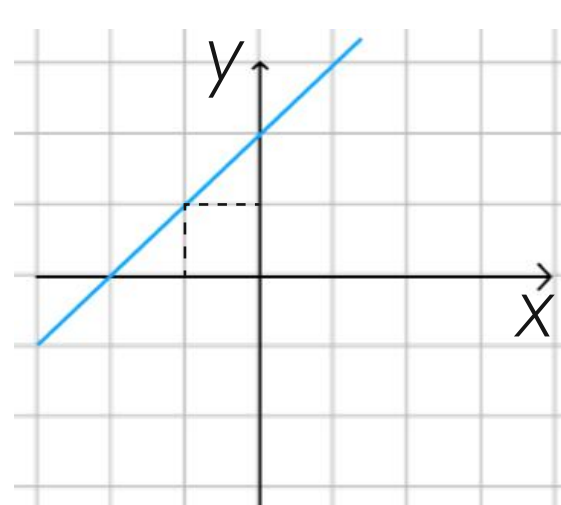
Пример: $y = x + 2$

x	1	-1
y	3	1

$x = -1$
 $y = x + 2 = -1 + 2 = 1$

графически

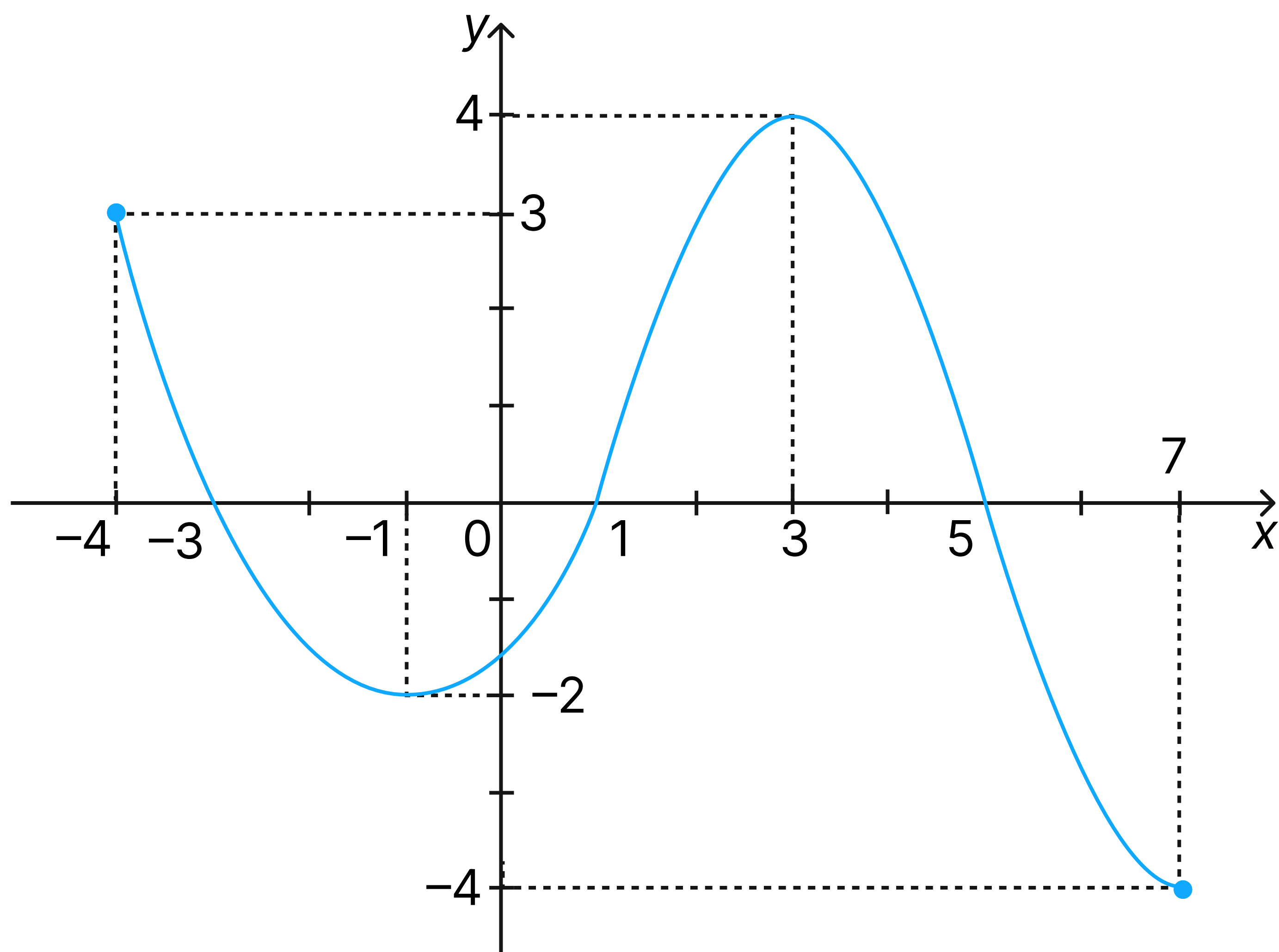
Множество всех точек плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.
Пример: $y = x + 2$



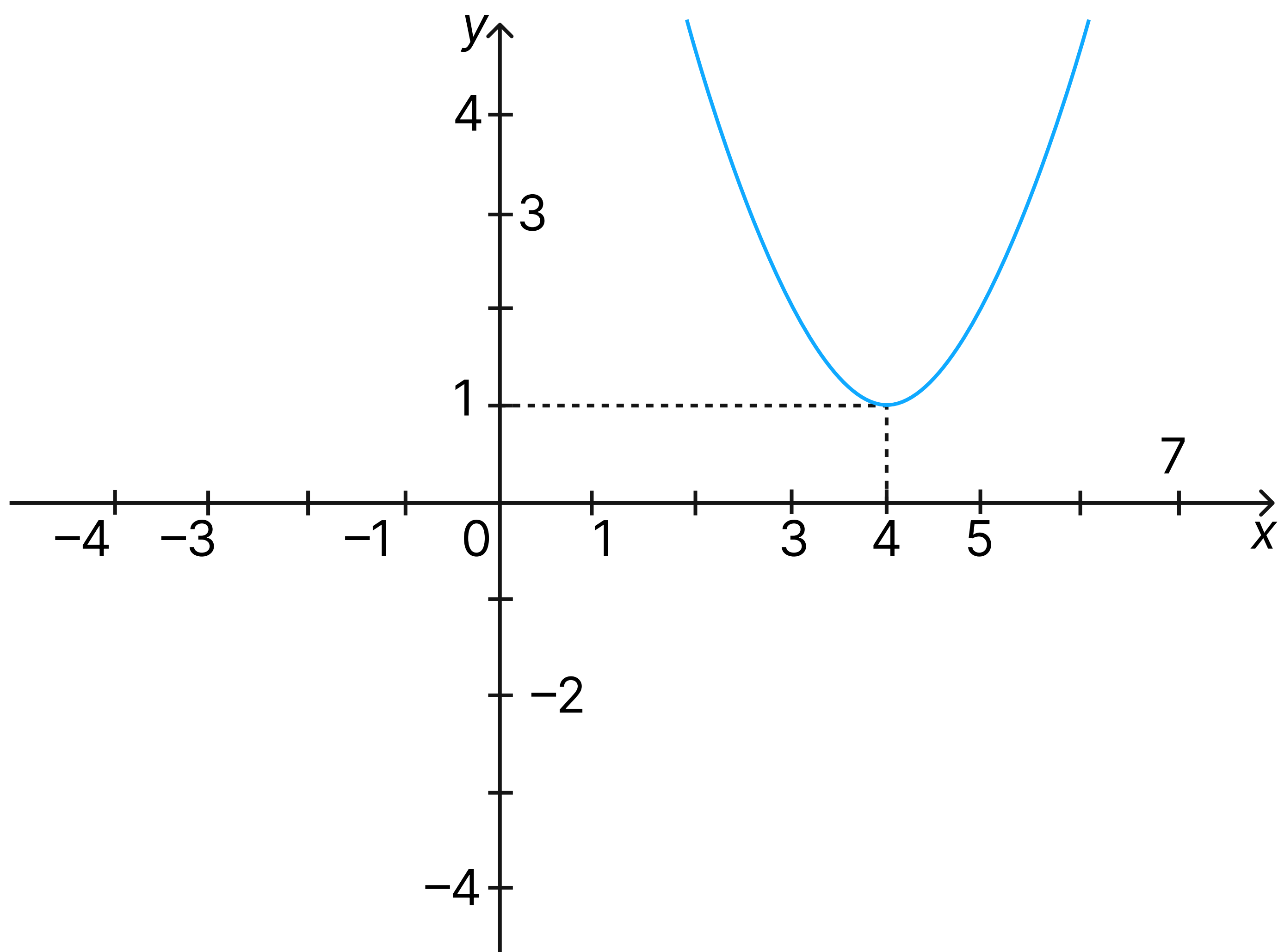
СВОЙСТВА ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Свойство графика	Пример 1	Пример 2
Область определения функции — это множество всех значений « x ». $D(y)$, ООФ	$D(y): x \in [-4; 7]$	$D(y): x \in (-\infty; +\infty)$
Промежутки возрастания/убывания — это такие промежутки « x », при которых функция возрастает/убывает	возрастание: $x \in [-1; 3]$ убывание: $x \in [-4; -1] \cup [3; 7]$	возрастание: $x \in [4; +\infty)$ убывание: $x \in (-\infty; 4]$
Нули функции — это такие значения « x », при которых $y = 0$	$y = 0$ при $x = -3$, $x = 1$ и $x = 5$	—
Наибольшее и наименьшее значения функции — наибольшее значение « y » и его наименьшее значение	y наименьшее = -4 y наибольшее = 4	y наименьшее = 1

Пример 1

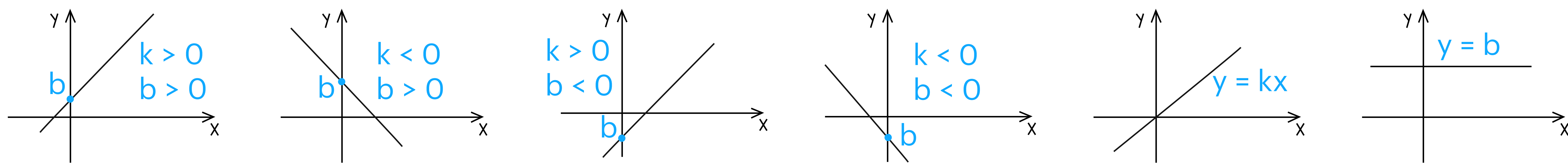


Пример 2



ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

- **Формула** $y = kx + b$, **график** — прямая (для построения нужно рассчитать координаты двух точек).
- **Коэффициенты:** $k > 0$ — функция возрастает; $k < 0$ — функция убывает;
 $b = y$, при котором $x = 0$ (координата y точки пересечения графика и оси Oy).

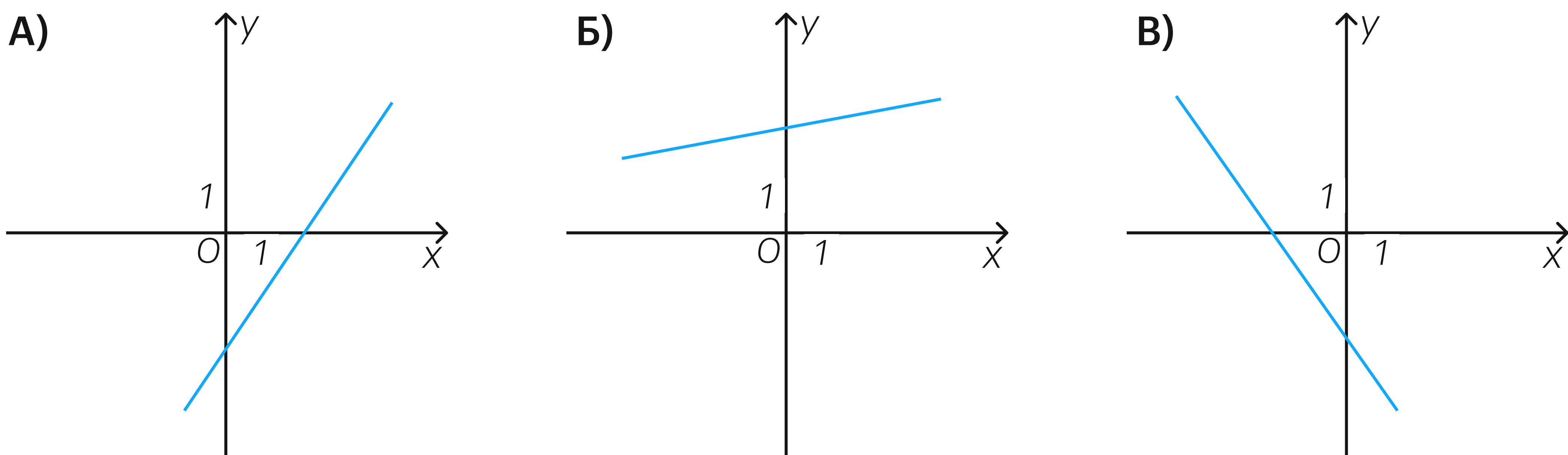


- **Дополнительно:** $y = kx$ проходит через начало координат ($b = 0$); $y = b$ параллельна оси Ox ($k = 0$).

Пример 1

На рисунках изображены графики функций вида $y = kx + b$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов k и b . В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Графики



- А) возрастает $\Rightarrow k > 0$;
 при $x = 0, y < 0 \Rightarrow b < 0$; А — 3
- Б) возрастает $\Rightarrow k > 0$;
 при $x = 0, y > 0 \Rightarrow b > 0$; Б — 2
- В) убывает $\Rightarrow k < 0$;
 при $x = 0, y < 0 \Rightarrow b < 0$;
 В — 1

Коэффициенты

- 1) $k < 0, b < 0$ 2) $k > 0, b > 0$ 3) $k > 0, b < 0$

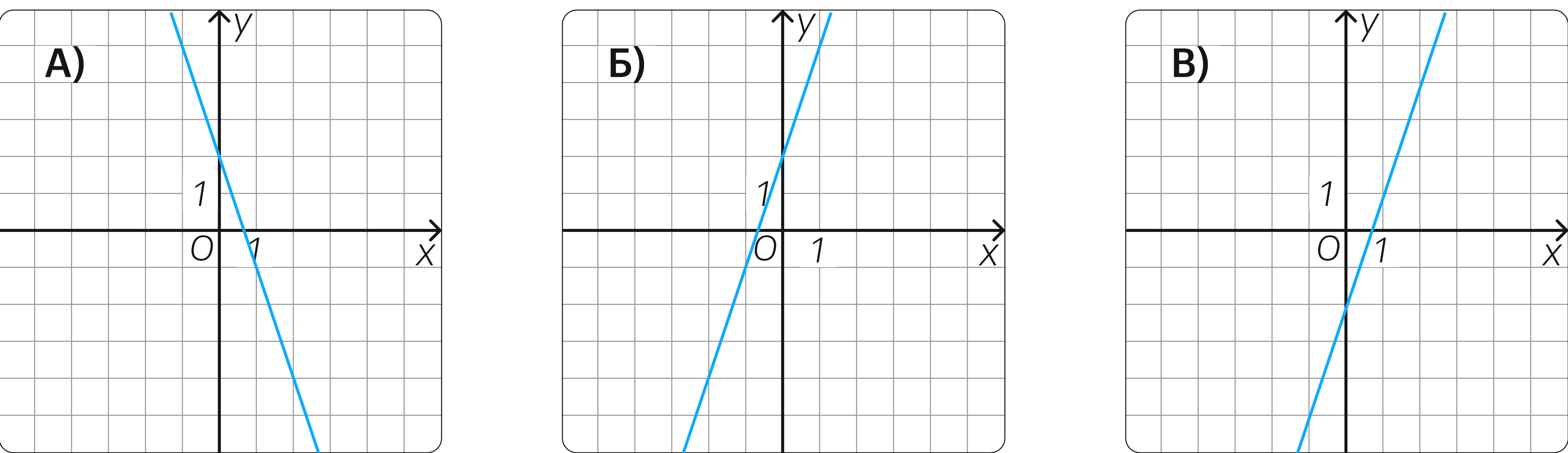
Ответ:

3	2	1										
---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Пример 2

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают. В ответ запишите последовательность цифр.

Графики



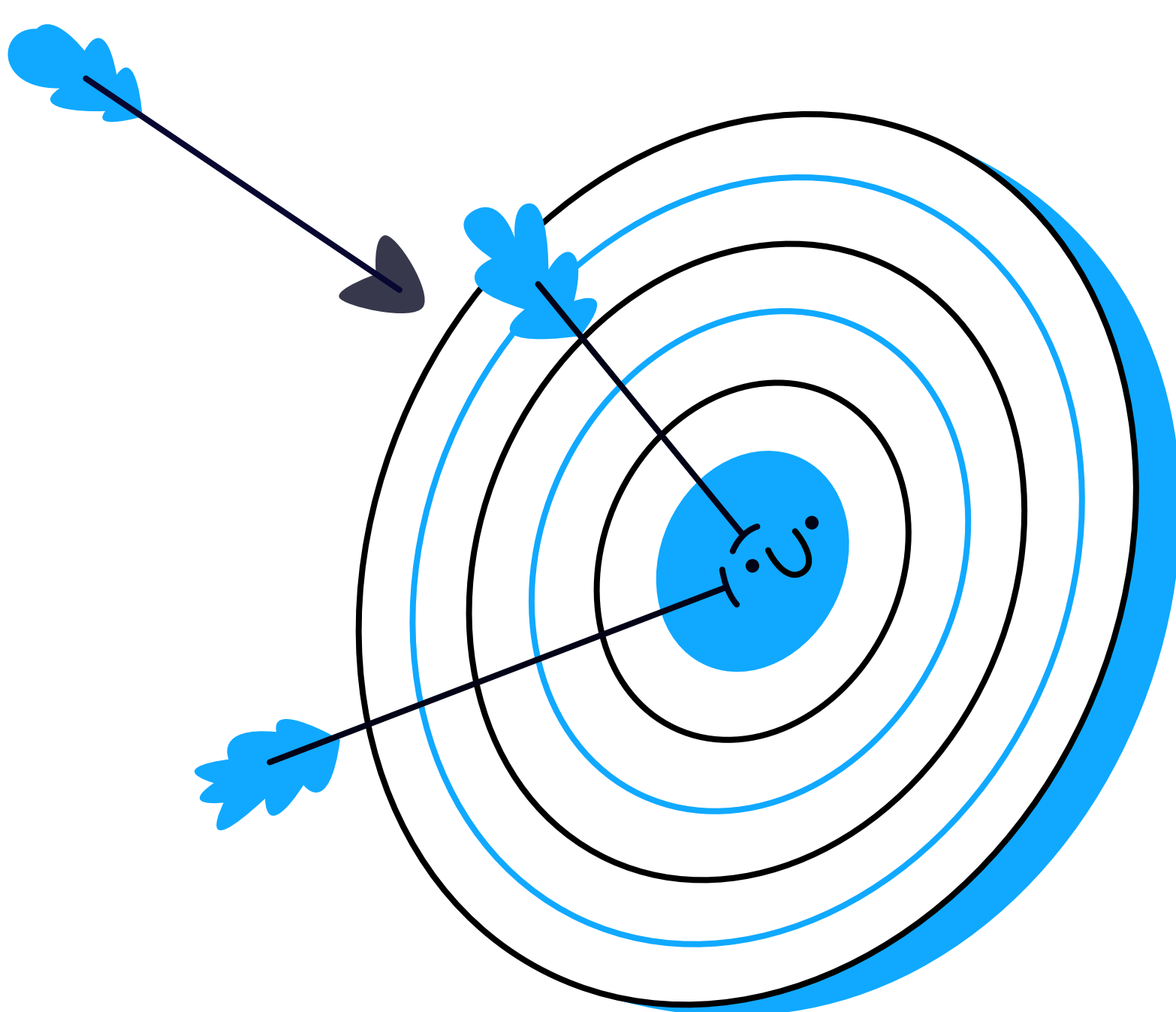
Формулы

- 1) $y = -3x + 2$ 2) $y = 3x - 2$ 3) $y = 3x + 2$

- А) убывает $\Rightarrow k < 0$, проходит через точку $(0; 2)$, значит, А — 1
 Б) возрастает $\Rightarrow k > 0$, проходит через точку $(0; 2)$, значит, Б — 3
 В) возрастает $\Rightarrow k > 0$, проходит через точку $(0; -2)$, значит, В — 2

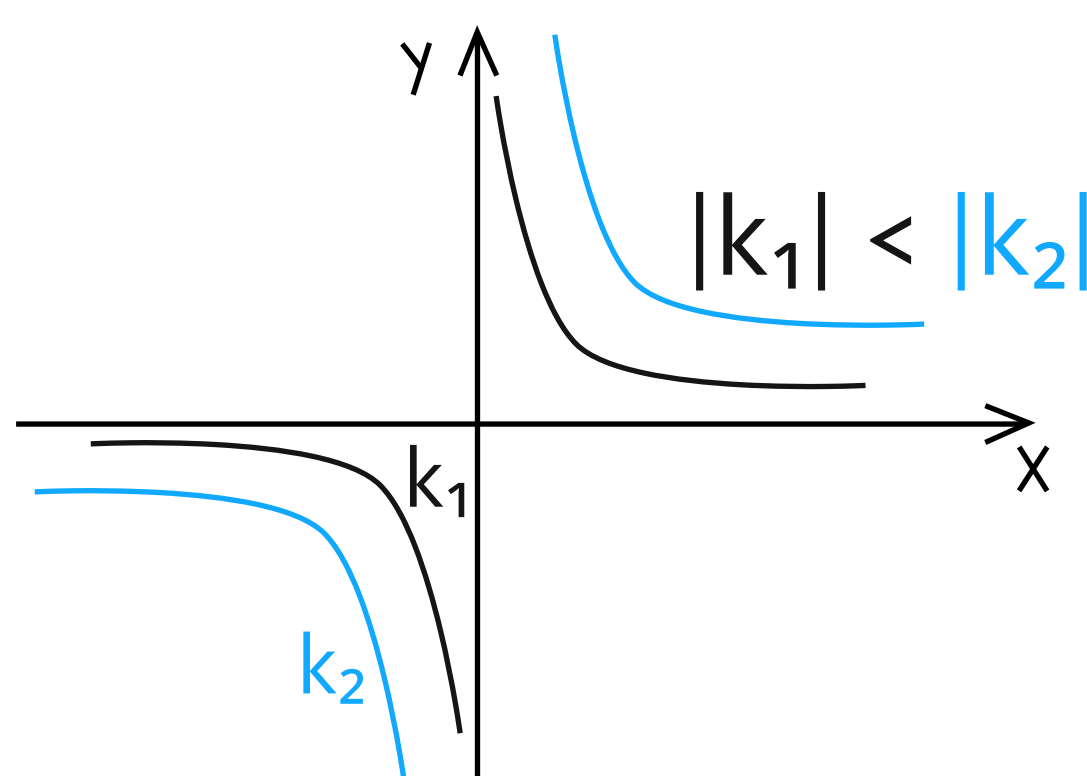
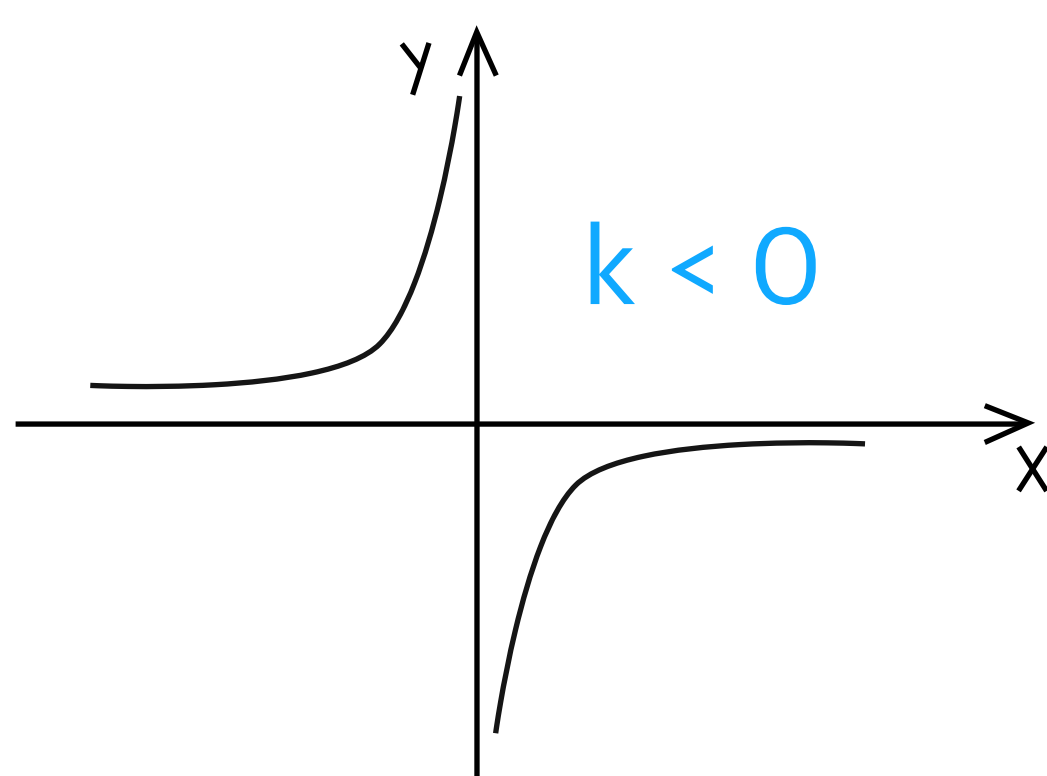
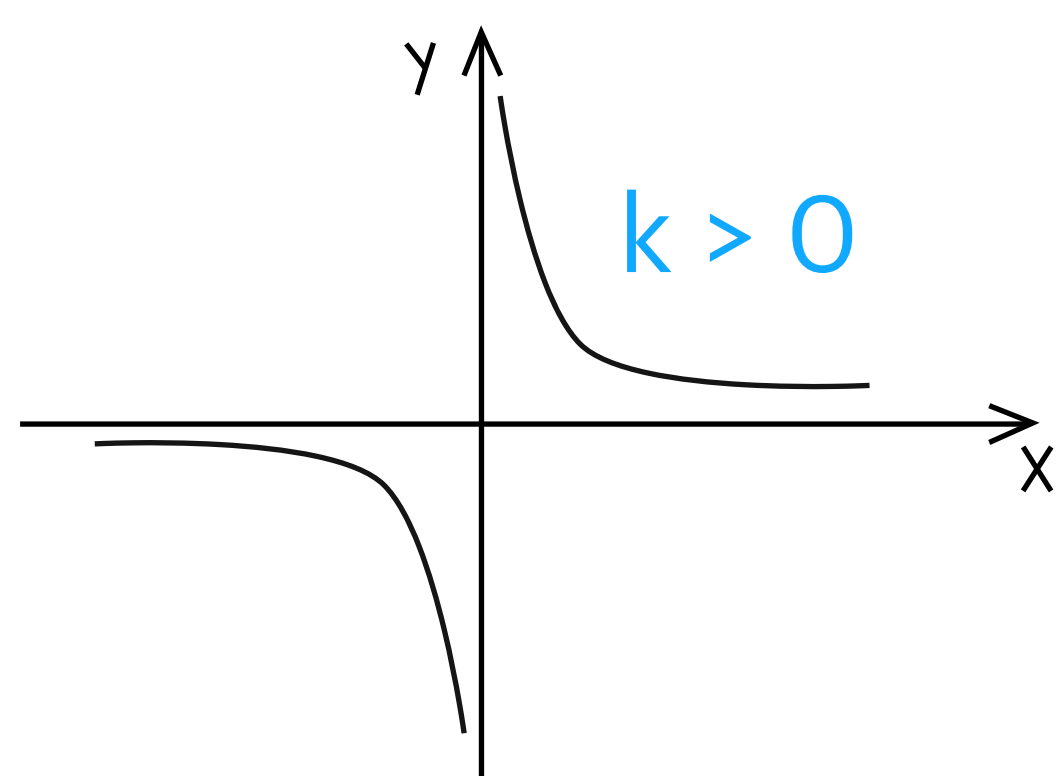
Ответ:

1	3	2										
---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



ФУНКЦИЯ, ОПИСЫВАЮЩАЯ ОБРАТНО ПРОПОРЦИОНАЛЬНУЮ ЗАВИСИМОСТЬ

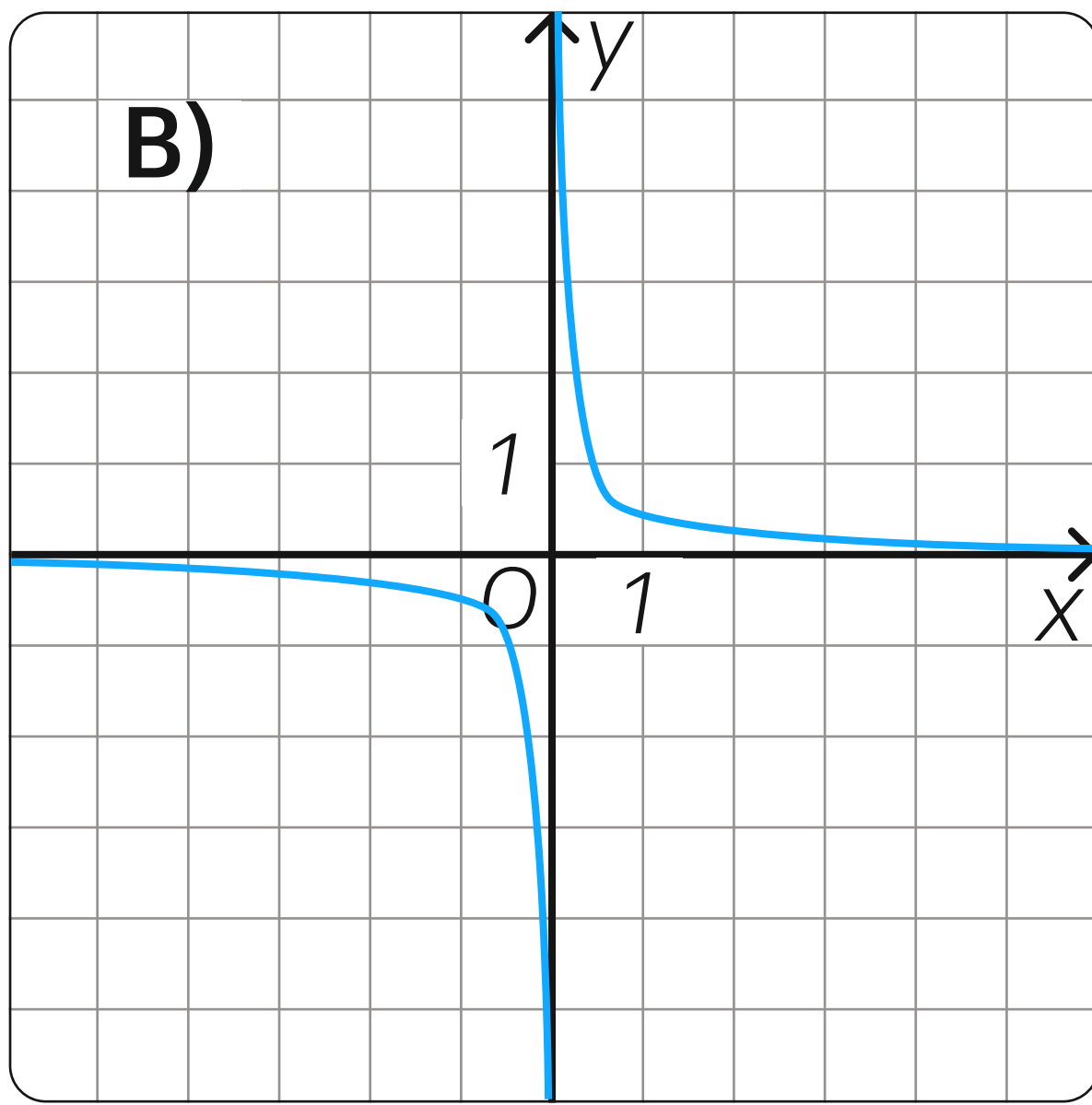
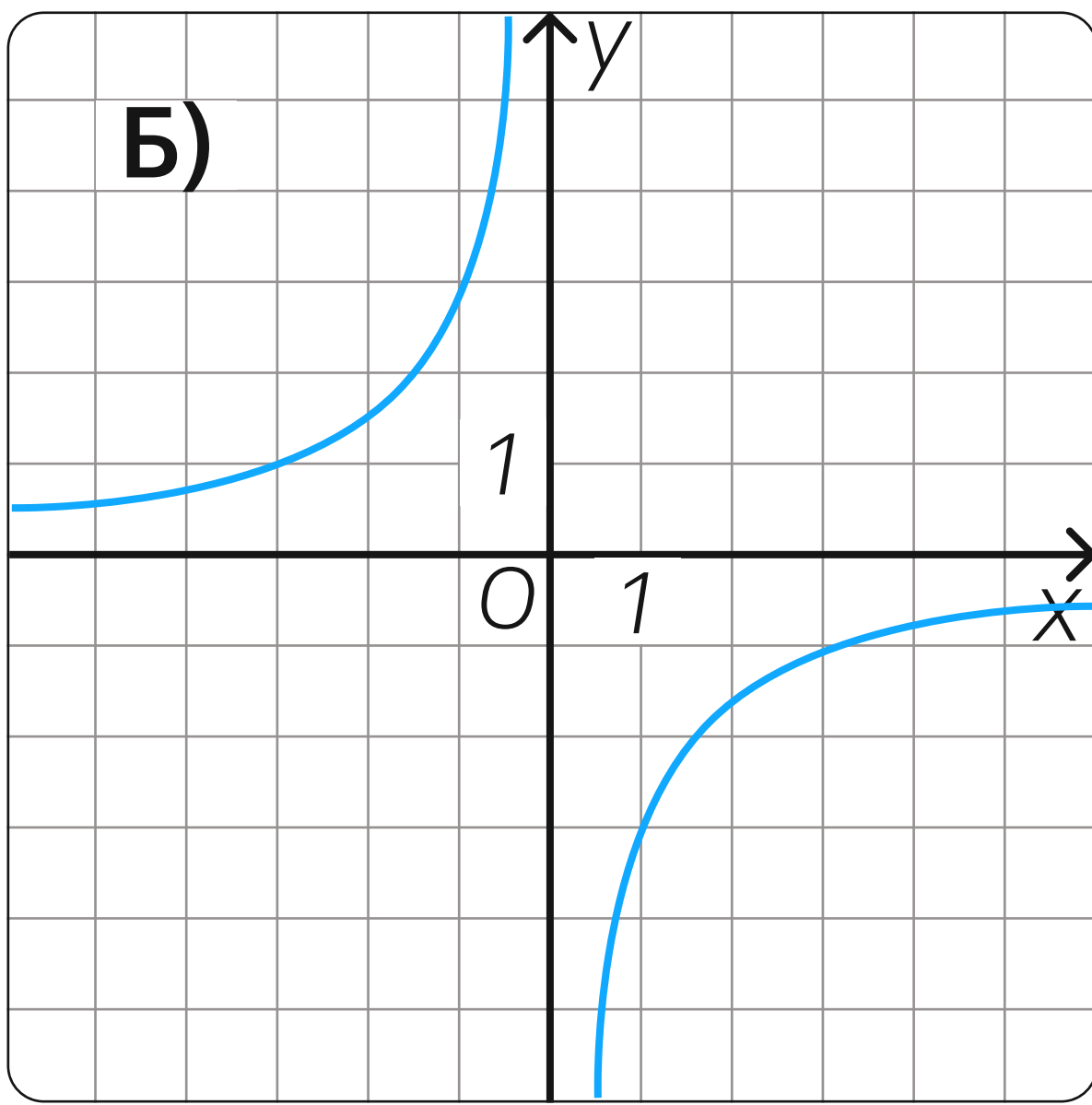
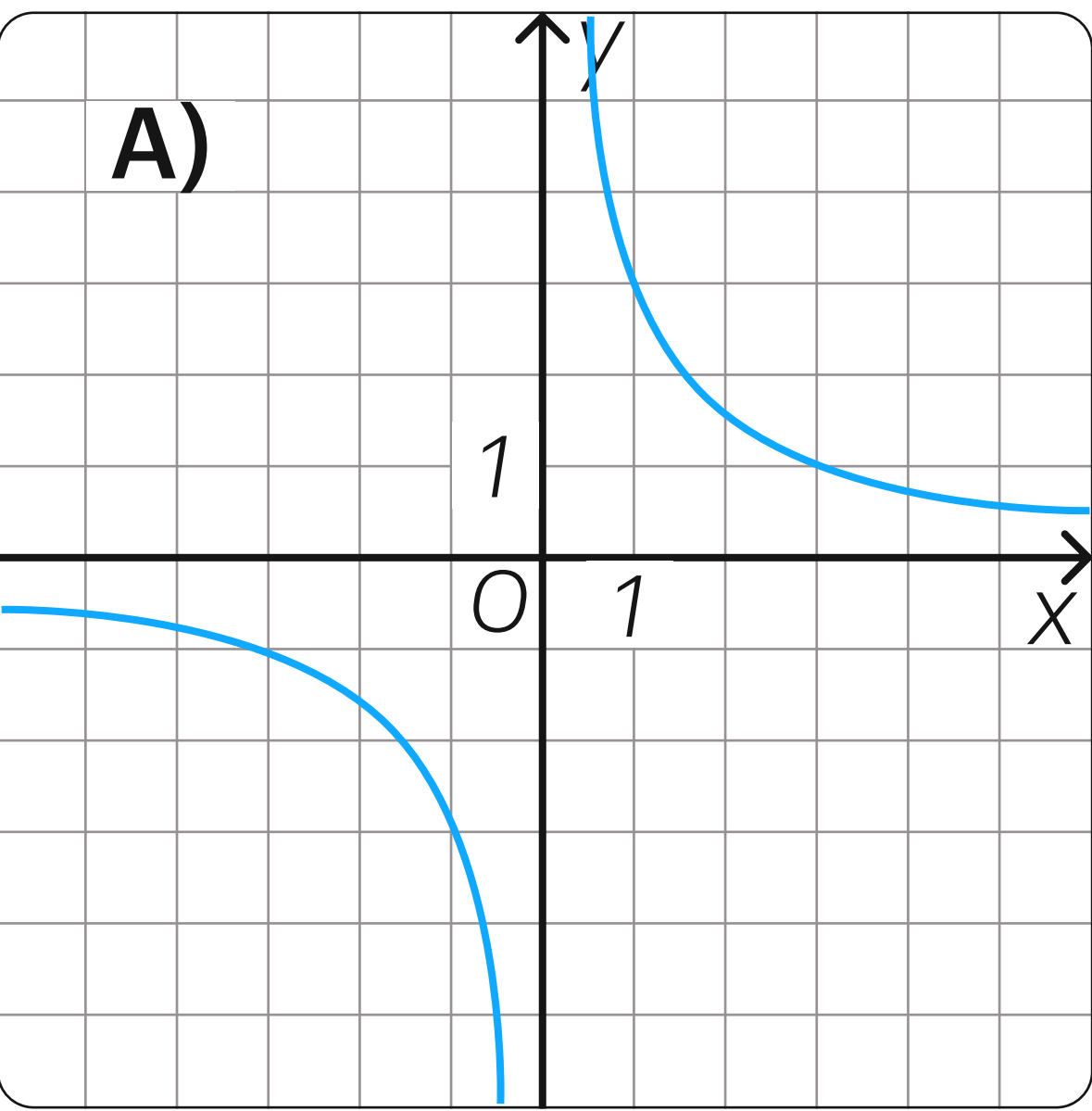
- **Формула** $y = \frac{k}{x}$, **график** — гипербола (для построения нужно рассчитать координаты 8–10 точек).
- **Коэффициенты:** $k > 0$ — ветви в 1 и 3 четвертях; $k < 0$ — ветви во 2 и 4 четвертях; чем меньше модуль k , тем ближе ветви гиперболы находятся к осям.



Пример 3

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают. В ответ запишите последовательность цифр.

Графики



- А) ветви гиперболы в 1 и 3 четвертях, значит, А — 3
- Б) ветви гиперболы во 2 и 4 четвертях, значит, Б — 2
- В) ветви гиперболы в 1 и 3 четвертях и близко к осям, значит, В — 1 ($1/3 < 3$)

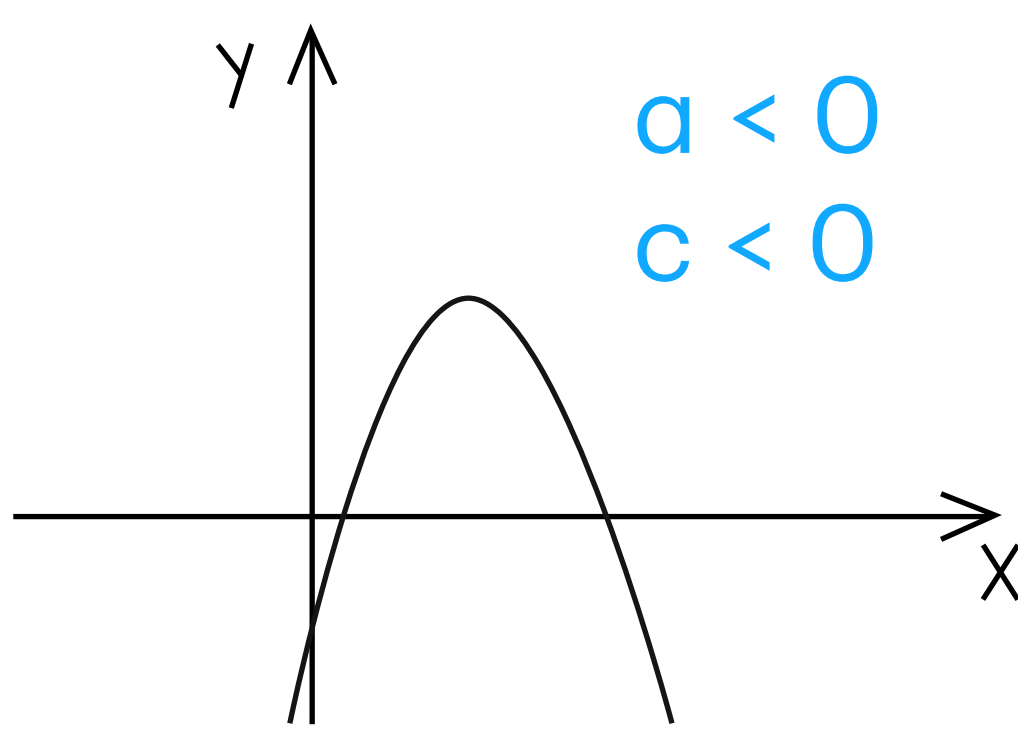
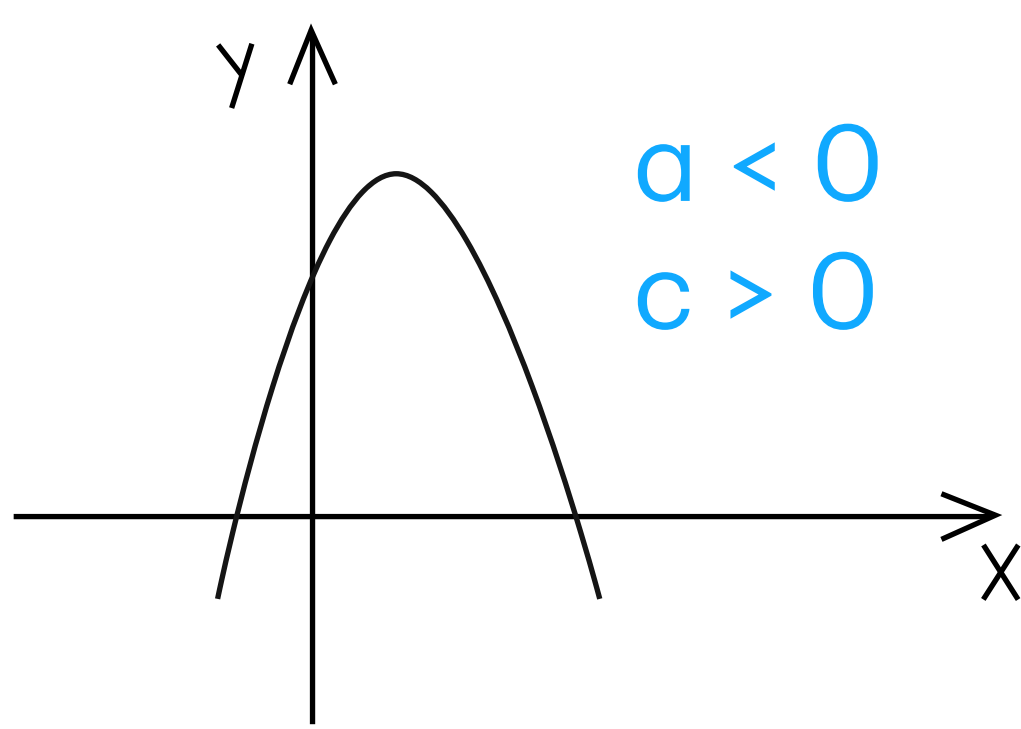
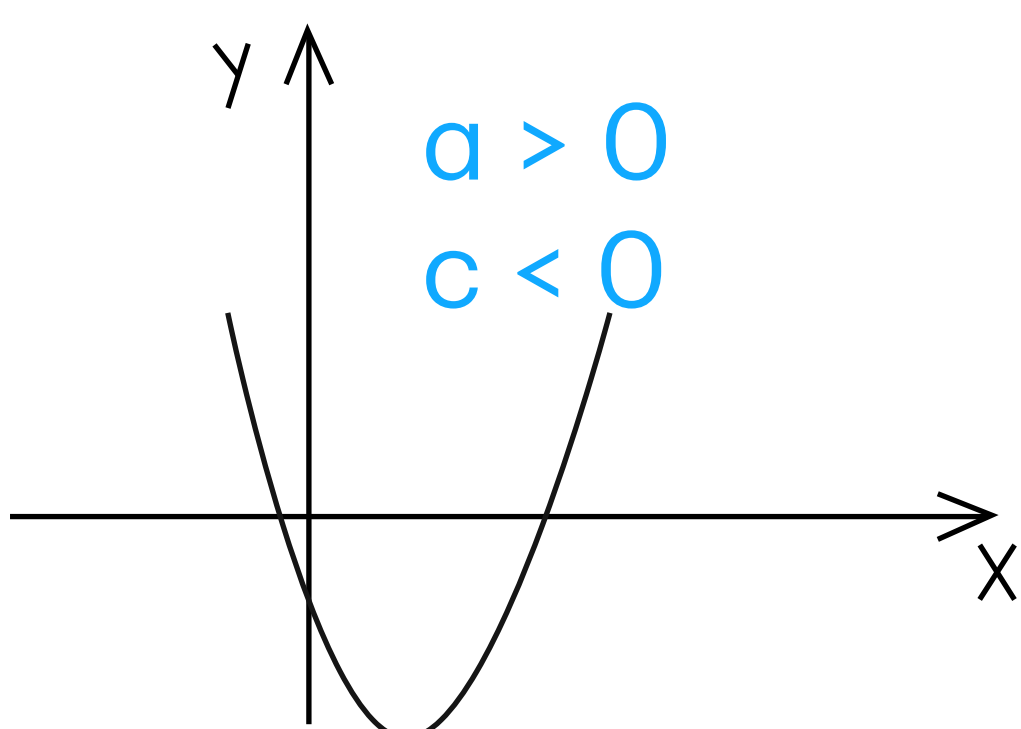
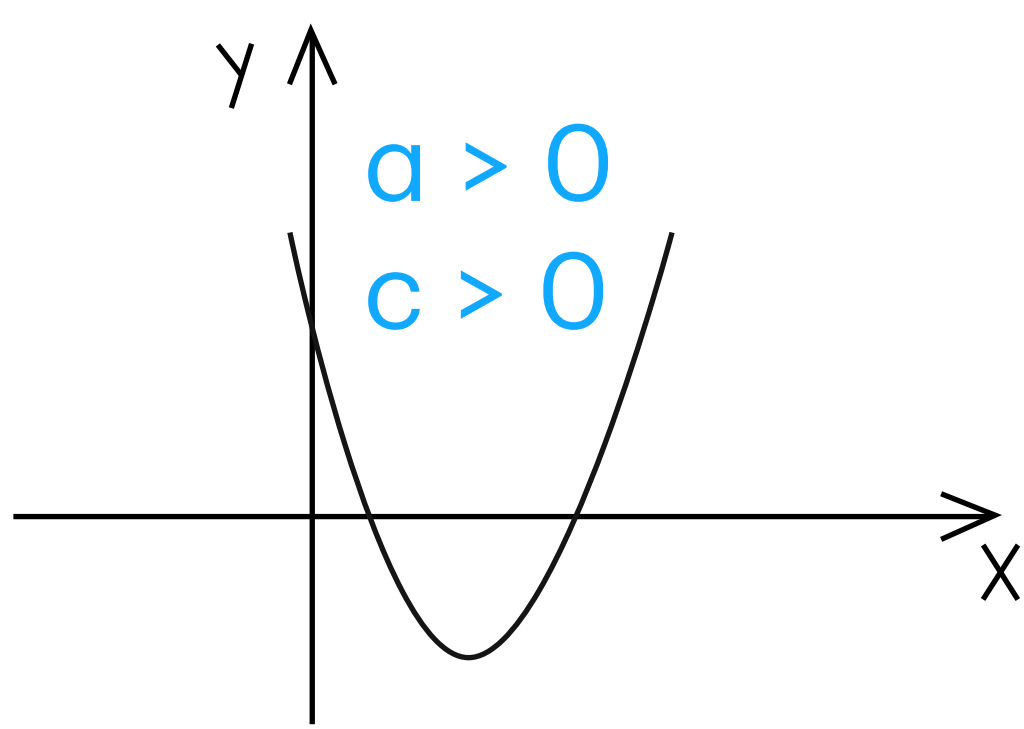
Формулы

- 1) $y = \frac{1}{3x}$
- 2) $y = -\frac{3}{x}$
- 3) $y = \frac{3}{x}$

Ответ: 3 2 1

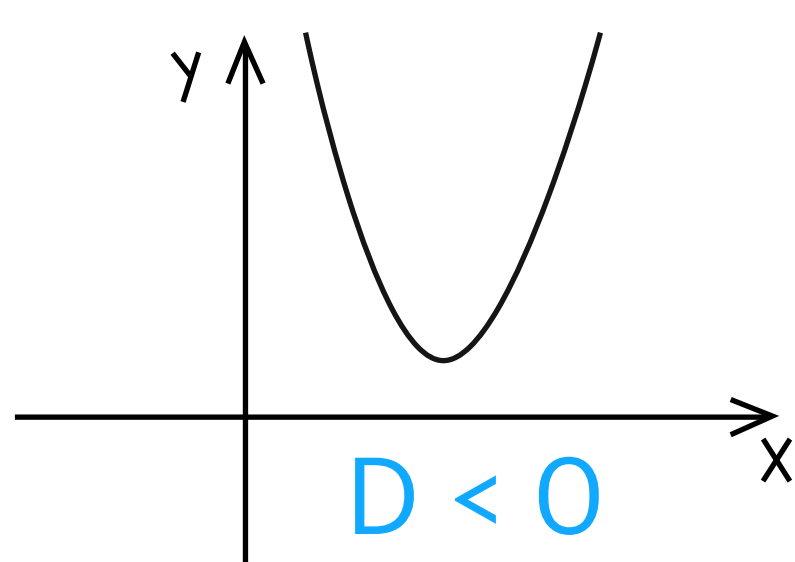
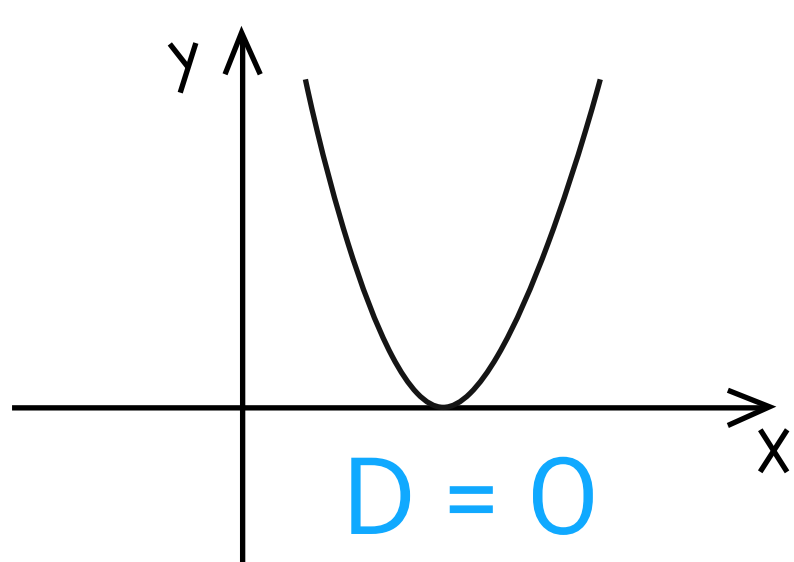
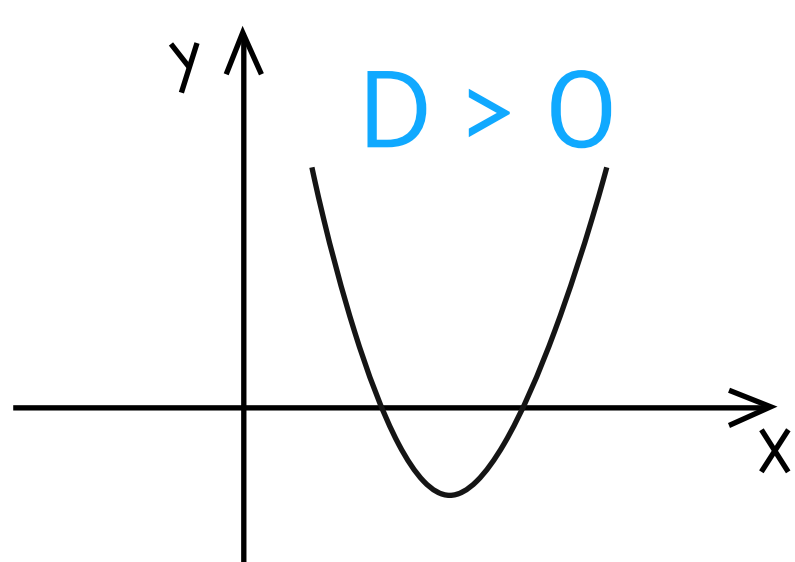
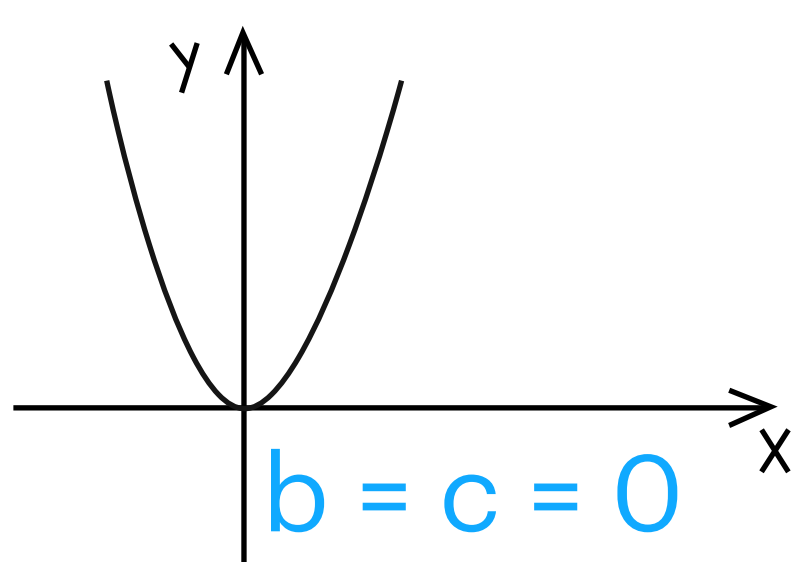
КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

- **Формула** $y = ax^2 + bx + c$, **график** — парабола.
- **Построение графика:** $x_B = -b / 2a$, $y_B = a \cdot (x_B)^2 + b \cdot (x_B) + c$, определить направление ветвей, посчитать координаты 4 точек (два значения x меньше x_B и два больше).
- **Коэффициенты:** $a > 0$ — ветви вверх; $a < 0$ — ветви вниз; $c = y$, при котором $x = 0$ (координата y точки пересечения графика и оси Oy).



Если знаки a и b совпадают, то вершина слева от Oy ; если отличаются, то вершина справа от Oy .

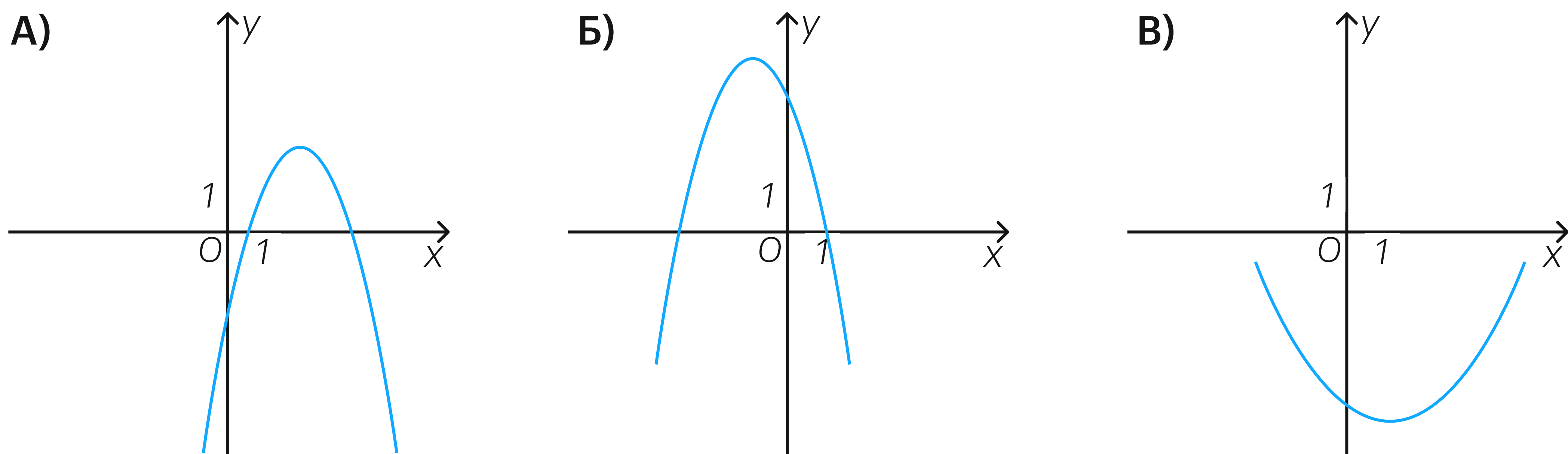
- **Дополнительно:** если $b = c = 0$, то вершина параболы находится в точке $(0; 0)$.
Количество общих точек параболы и оси Ox (количество нулей функции):
 $D > 0$ — 2 общие точки; $D = 0$ — 1 общая точка; $D < 0$ — 0 общих точек.



Пример 4

На рисунках изображены графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов a и c . В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Графики



А) ветви вниз $\Rightarrow a < 0$;
при $x = 0, y < 0 \Rightarrow c < 0$; А — 1

Б) ветви вниз $\Rightarrow a < 0$;
при $x = 0, y > 0 \Rightarrow c > 0$; Б — 2

В) ветви вверх $\Rightarrow a > 0$;
при $x = 0, y < 0 \Rightarrow c < 0$; В — 3

Коэффициенты

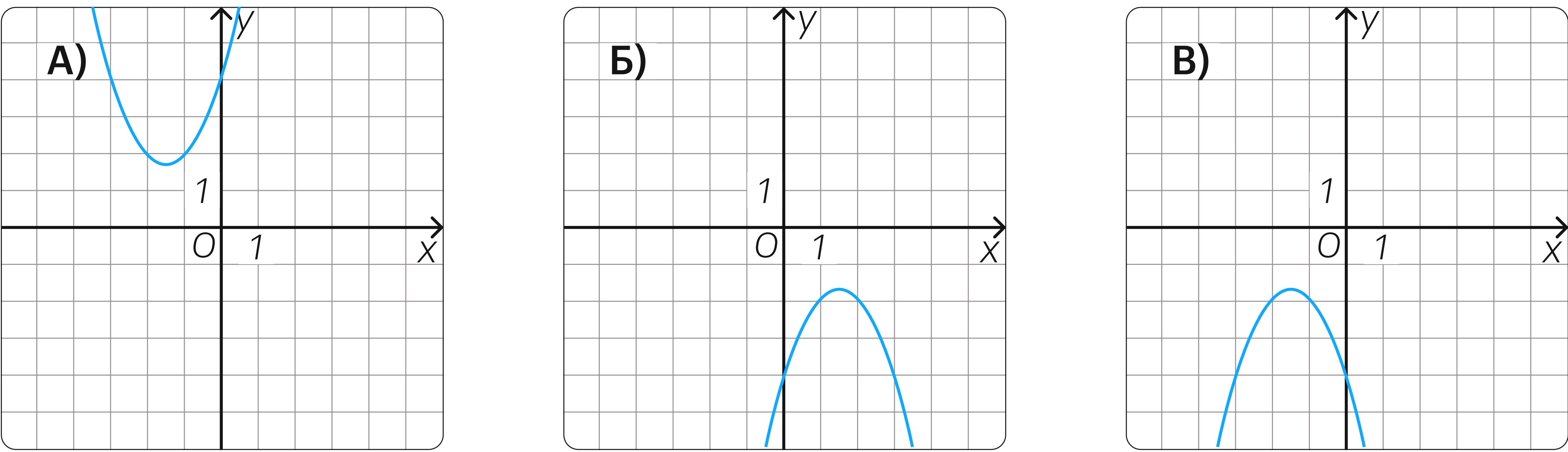
- 1) $a < 0, c < 0$ 2) $a < 0, c > 0$ 3) $a > 0, c < 0$

Ответ: 1 2 3

Пример 5

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

Графики



А) ветви вверх $\Rightarrow a > 0$;
 $x_B = -1,5 \Rightarrow b > 0$; А — 3

Б) ветви вниз $\Rightarrow a < 0$;
 $x_B = 1,5 \Rightarrow b > 0$; Б — 1

В) ветви вниз $\Rightarrow a < 0$;
 $x_B = -1,5 \Rightarrow b < 0$; В — 2

Формулы

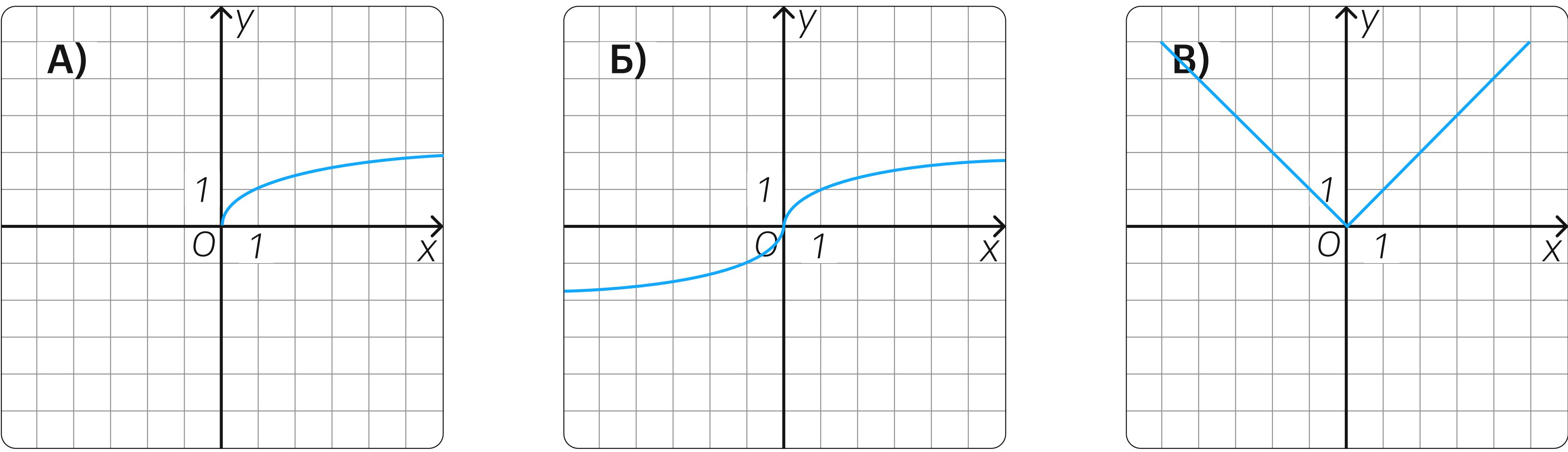
- 1) $y = -x^2 + 3x - 4$ 2) $y = -x^2 - 3x - 4$ 3) $y = x^2 + 3x + 4$

Ответ: 3 1 2

Пример 6

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

Графики



Формулы

1) $y = \sqrt[3]{x}$

2) $y = |x|$

3) $y = \sqrt{x}$

Ответ: 3 1 2

ПАРАБОЛЫ И ГИПЕРБОЛЫ В №22

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ЛЮБОГО ГРАФИКА ИЗ №22, В КОТОРОМ ЕСТЬ ДРОБЬ:

- 1 необходимо указать ограничение: знаменатель $\neq 0$;
- 2 разложить числитель и знаменатель этой дроби на множители;
- 3 сократить одинаковые множители;
- 4 построить график функции;
- 5 выколоть точки при x , полученных в ограничениях.

Как найти значения параметра:

- определить вид прямой ($y = b$ или $y = kx$), положить линейку на график в соответствии с видом прямой;
- проанализировать изменение количества точек при изменении положения прямой;
- начертить прямые в тех местах, где количество общих точек изменяется и подписать это количество;
- выписать все значения параметра от $-\infty$ до $+\infty$ с указанием количества общих точек;
- выписать ответ.

Если условию подходит промежуток значений, то используем следующие правила:

- если количество точек на «границе» промежутка подходит условию, то обозначаем его нестрогим знаком и квадратной скобкой;
- если количество точек на «границе» промежутка не подходит условию, то обозначаем его строгим знаком и круглой скобкой.

Пример 7

Постройте график функции $y = -5 - \frac{x - 2}{x^2 - 2x}$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком общих точек.

Решение:

Выпишем ограничение на знаменатель: $x^2 - 2x \neq 0$;
 $x(x - 2) \neq 0$; $x \neq 0$ и $x \neq 2$.

$$\begin{aligned} \text{Преобразуем функцию } y &= -5 - \frac{x - 2}{x^2 - 2x} = -5 - \frac{x - 2}{x(x - 2)} = \\ &= -5 - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Это обратная пропорциональность, графиком является гипербола.

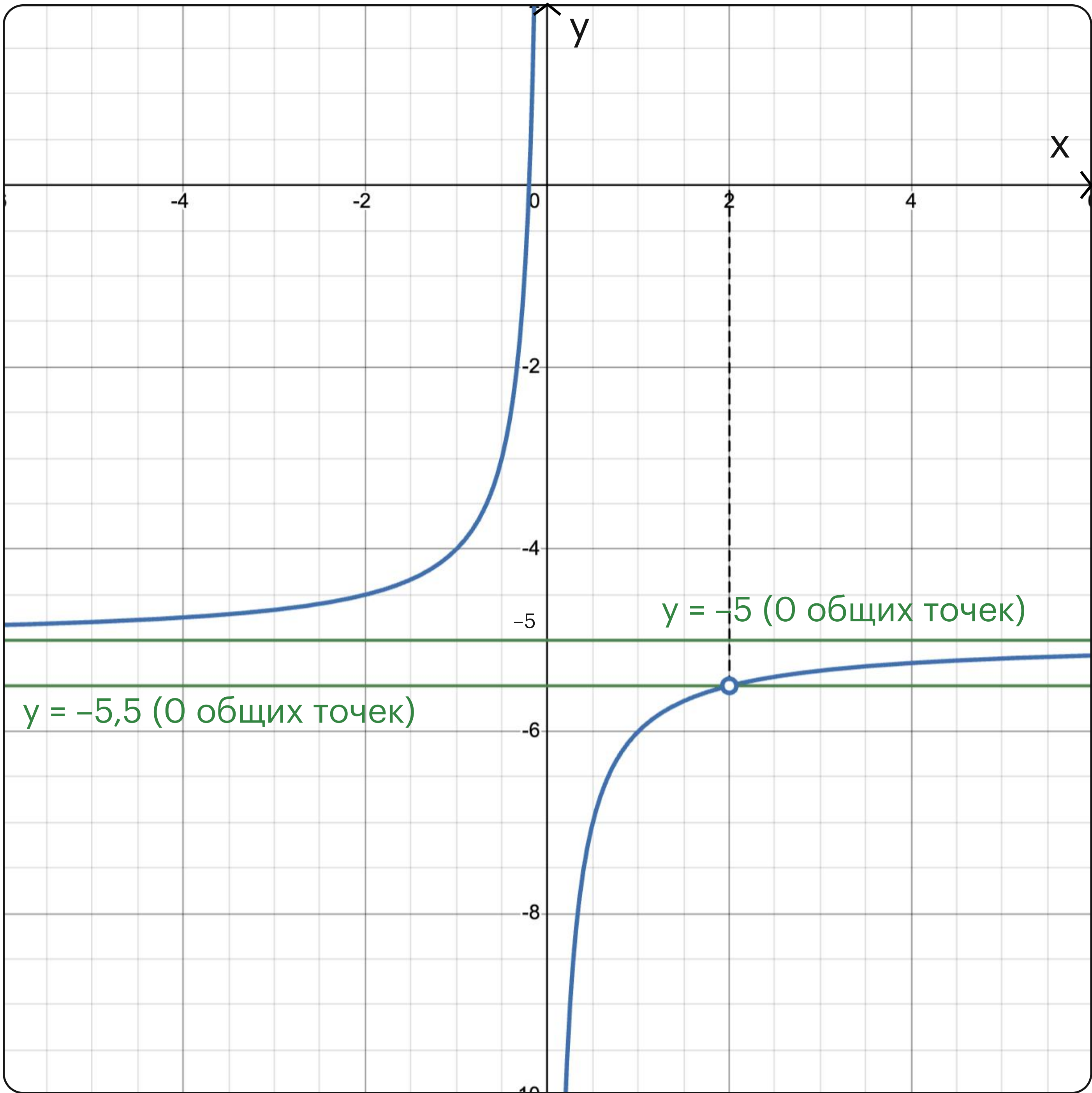
Таблица значений:

x	-4	-2	-1	-0,5	0,5	1	2	4
y	-4,75	-4,5	-4	-3	-7	-6	-5,5	-5,25

Точка $(2; -5,5)$ — выколота

Прямая $y = m$, параллельная оси Ox , не имеет с графиком общих точек при $m = -5,5$ и $m = -5$.

Ответ: $m = -5,5$ и $m = -5$.



Пример 8

Постройте график функции $y = \frac{6x + 7}{6x^2 + 7x}$

Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение: выпишем ограничение на знаменатель:
 $6x^2 + 7x \neq 0$; $x(6x + 7) \neq 0$; $x \neq 0$ и $x \neq -7/6$.

Преобразуем функцию $y = \frac{6x + 7}{6x^2 + 7x} = \frac{6x + 7}{x(6x + 7)} = \frac{1}{x}$

Это обратная пропорциональность, графиком является гипербола.

Таблица значений:

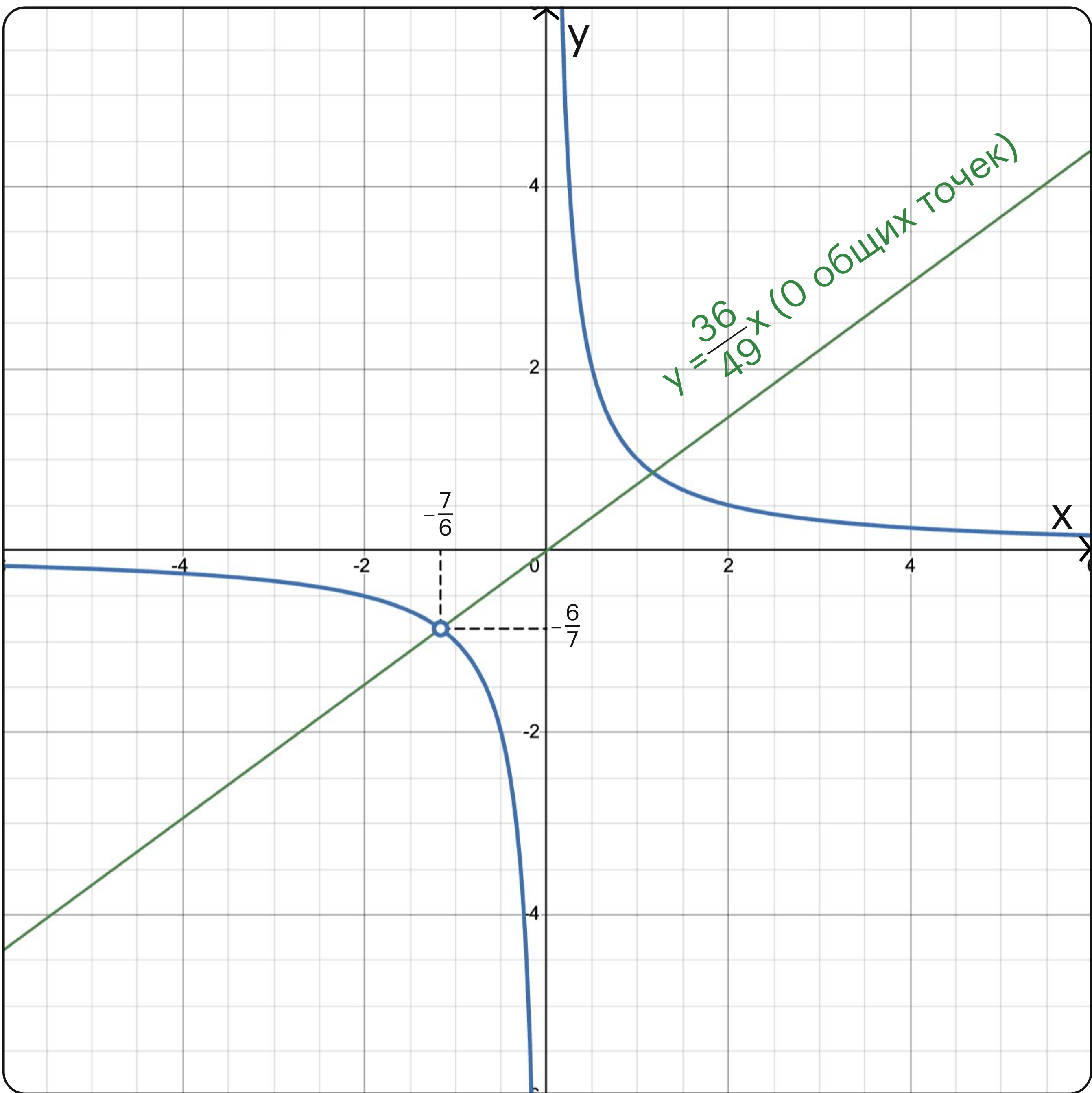
x	-4	-2	-1	-0,5	0,5	1	2	4
y	-0,25	-0,5	-1	-2	2	1	0,5	0,25

Точка $(-7/6; -6/7)$ — выколота

Прямая $y = kx$, проходящая через точку $(0; 0)$, имеет с графиком ровно одну общую точку, если она пройдет через выколотую точку $(-7/6; -6/7)$

$$\frac{-6}{7} = \frac{-7}{6} k \Rightarrow k = \frac{-6 \cdot 6}{7 \cdot (-7)} = \frac{36}{49}$$

Ответ: $k = 36/49$.



Пример 9

Постройте график функции $y = \frac{(x^2 + 0,25)(x - 1)}{1 - x}$

Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение:
 Выпишем ограничение на знаменатель: $1 - x \neq 0$; $x \neq 1$.

Преобразуем функцию $y = \frac{(x^2 + 0,25)(x - 1)}{1 - x} = \frac{-(x^2 + 0,25)(1 - x)}{1 - x} = -x^2 - 0,25$

Это квадратичная функция, графиком является парабола с вершиной в точке $(0; -0,25)$ и ветвями, направленными вниз (т.к. $a = -1 < 0$)

Таблица значений:

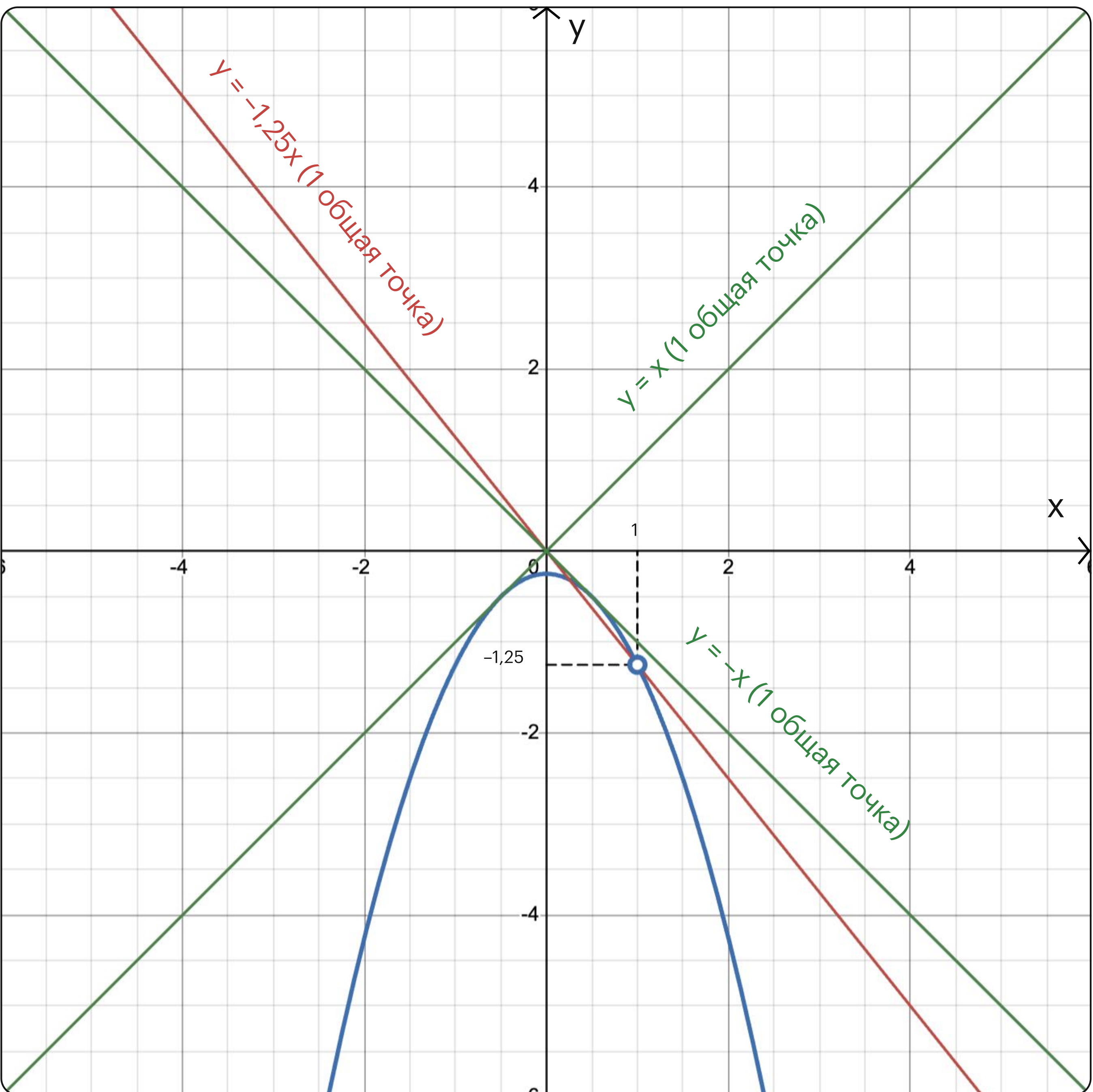
x	-2	-1	0	1	2
y	-4,25	-1,25	-0,25	-1,25	-4,25

Точка $(1; -1,25)$ — выколота

Прямая $y = kx$, проходящая через точку $(0; 0)$, имеет с графиком ровно одну общую точку, если:

- уравнение $-x^2 - 0,25 = kx$ имеет один корень
 $x^2 + kx + 0,25 = 0$ ($a = 1$, $b = k$, $c = 0,25$)
 $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,25 = k^2 - 1$
 $k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$
- прямая $y = kx$ проходит через выколотую точку
 $(1; -1,25) -1,25 = k \cdot 1 \Leftrightarrow -1,25 = k$

Ответ: $k = -1,25$; $k = -1$; $k = 1$.



КУСОЧНО-ЗАДАНЫЕ ФУНКЦИИ №22

Пример 10

Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 - 8x + 14 & \text{при } x \geq 3, \\ x - 2 & \text{при } x < 3. \end{cases}$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение: рассмотрим каждый график

1) $y = x^2 - 8x + 14$ при $x \geq 3$ — квадратичная функция, графиком является парабола с вершиной в точке $(4; -2)$ и ветвями, направленными вверх (т.к. $a = 1 > 0$)

Таблица значений:

x	3	4	5	6
y	-1	-2	-1	2

2) $y = x - 2$ при $x < 3$ — линейная функция, графиком является прямая

Таблица значений:

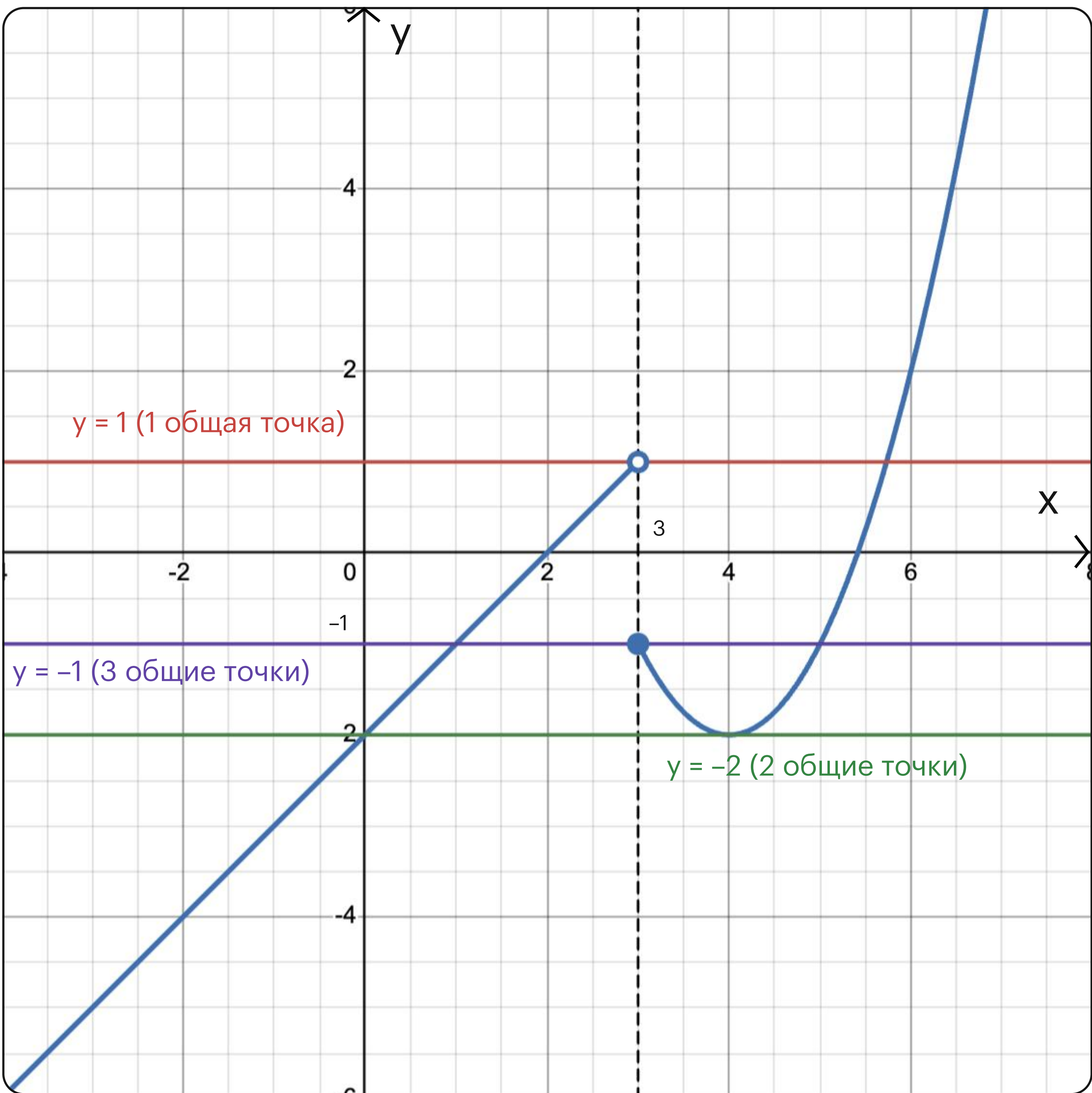
x	3	0
y	1	-2

точка $(3; 1)$ — выколота

Прямая $y = m$, параллельная оси Ox , имеет с графиком:

- 1 общую точку при $m < -2$;
- 2 общие точки при $m = -2$;
- 3 общие точки при $-2 < m \leq -1$;
- 2 общие точки при $-1 < m < 1$;
- 1 общую точку при $m \geq 1$.

Ответ: $m \in \{-2\} \cup (-1; 1)$.



ФУНКЦИИ С МОДУЛЕМ №22

Пример 11

Постройте график функции $y = x|x| - |x| - 2x$.

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение:

Преобразуем функцию: $y = \begin{cases} x^2 - x - 2x & \text{при } x \geq 0, \\ -x^2 + x - 2x & \text{при } x < 0. \end{cases}$

1) $y = x^2 - 3x$ при $x \geq 0$ — квадратичная функция, графиком является парабола с вершиной в точке $(1,5; -2,25)$ и ветвями, направленными вверх (т.к. $a = 1 > 0$)

Таблица значений:

x	0	1	1,5	3
y	0	-2	-2,25	0

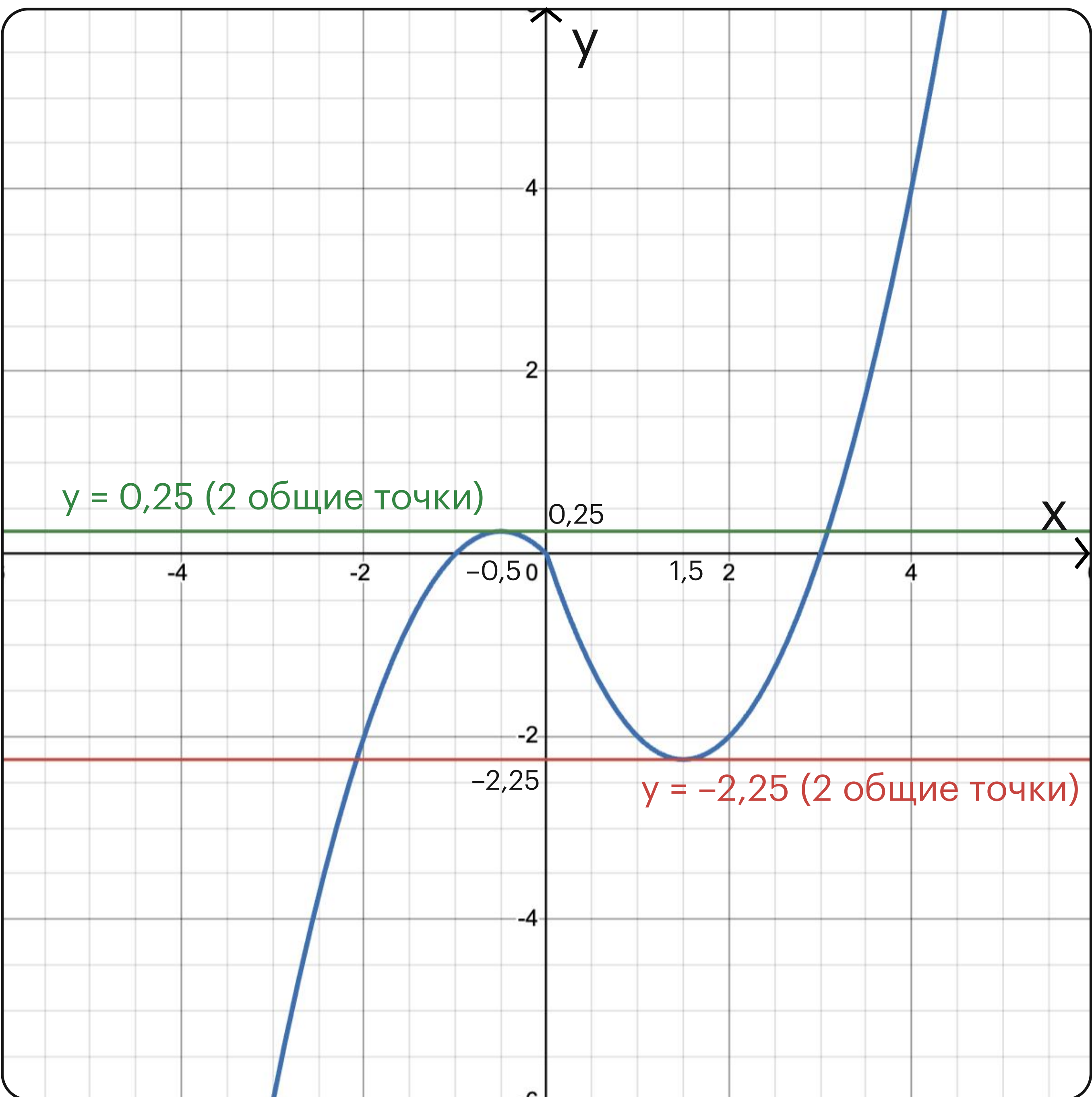
2) $y = -x^2 - x$ при $x < 0$ — квадратичная функция, графиком является парабола с вершиной в точке $(-0,5; 0,25)$ и ветвями, направленными вниз (т.к. $a = -1 < 0$)

Таблица значений:

x	-2	-1	-0,5	0
y	-2	0	0,25	0

Прямая $y = m$, параллельная оси Ox , имеет с графиком:

- 1 общую точку при $m < -2,25$;
- 2 общие точки при $m = -2,25$;
- 3 общие точки при $-2,25 < m < 0,25$;
- 2 общие точки при $m = 0,25$;
- 1 общую точку при $m > 0,25$.



Ответ: $m = -2,25$; $m = 0,25$.

Определение модуля:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Пример 12

Постройте график функции $y = \frac{(x^2 - 3x)|x|}{x - 3}$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком общих точек.

Решение:

Выпишем ограничение на знаменатель: $x - 3 \neq 0$; $x \neq 3$.

Преобразуем функцию: $y = \begin{cases} \frac{(x^2 - 3x)x}{x - 3} & \text{при } x \geq 0, \\ \frac{(x^2 - 3x)(-x)}{x - 3} & \text{при } x < 0. \end{cases}$

Рассмотрим каждый график

1) $y = \frac{(x^2 - 3x)x}{x - 3} = \frac{x(x - 3)x}{x - 3} = x^2$ при $x \geq 0$

Это квадратичная функция, графиком является парабола с вершиной в точке $(0; 0)$ и ветвями, направленными вверх (т.к. $a = 1 > 0$)

Таблица значений:

x	0	1	2	3
y	0	1	4	9

точка $(3; 9)$ — выколота

2) $y = \frac{(x^2 - 3x)(-x)}{x - 3} = \frac{x(x - 3)(-x)}{x - 3} = -x^2$ при $x < 0$

Это квадратичная функция, графиком является парабола с вершиной в точке $(0; 0)$ и ветвями, направленными вниз (т.к. $a = -1 < 0$)

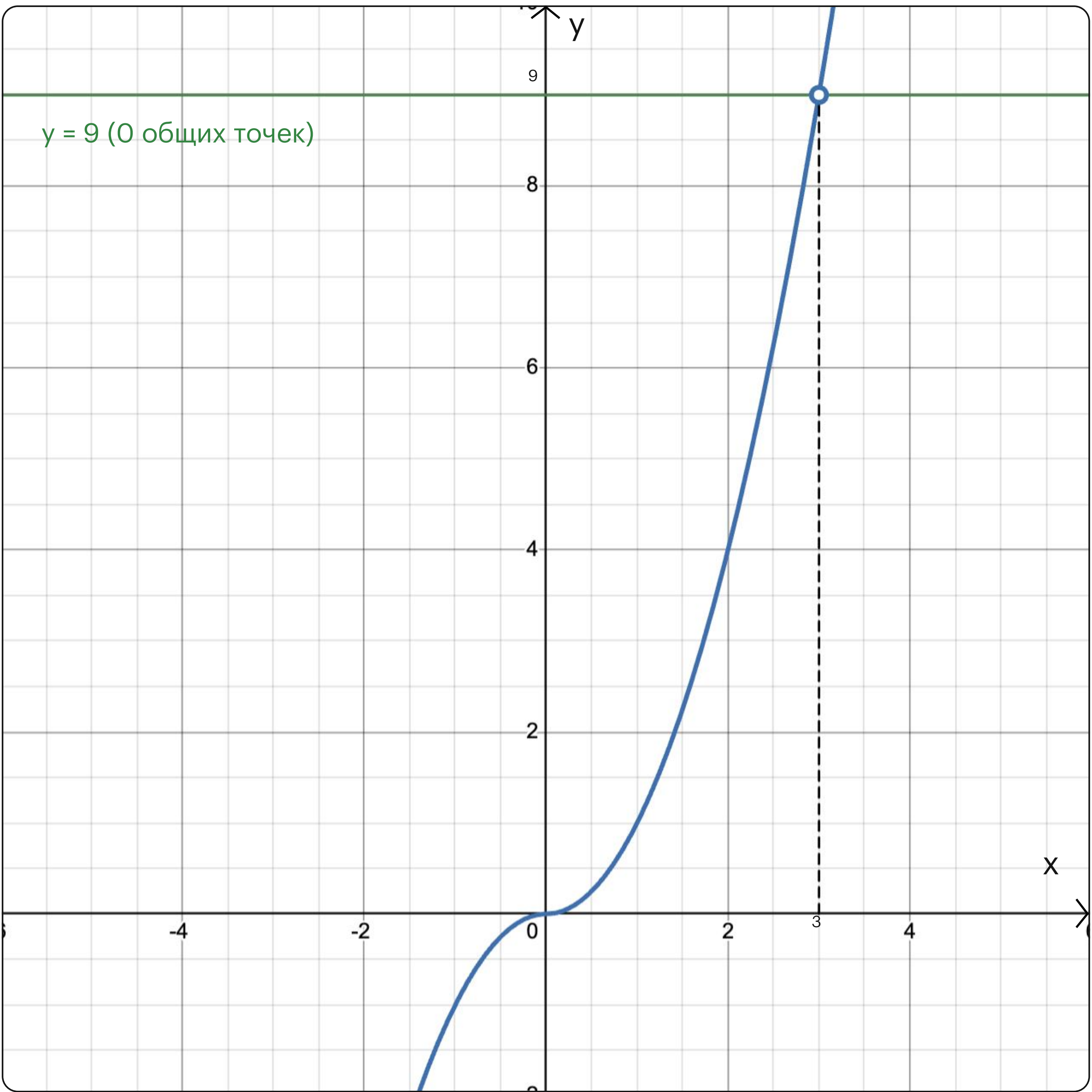
Таблица значений:

x	-2	-1	0
y	-4	-1	0

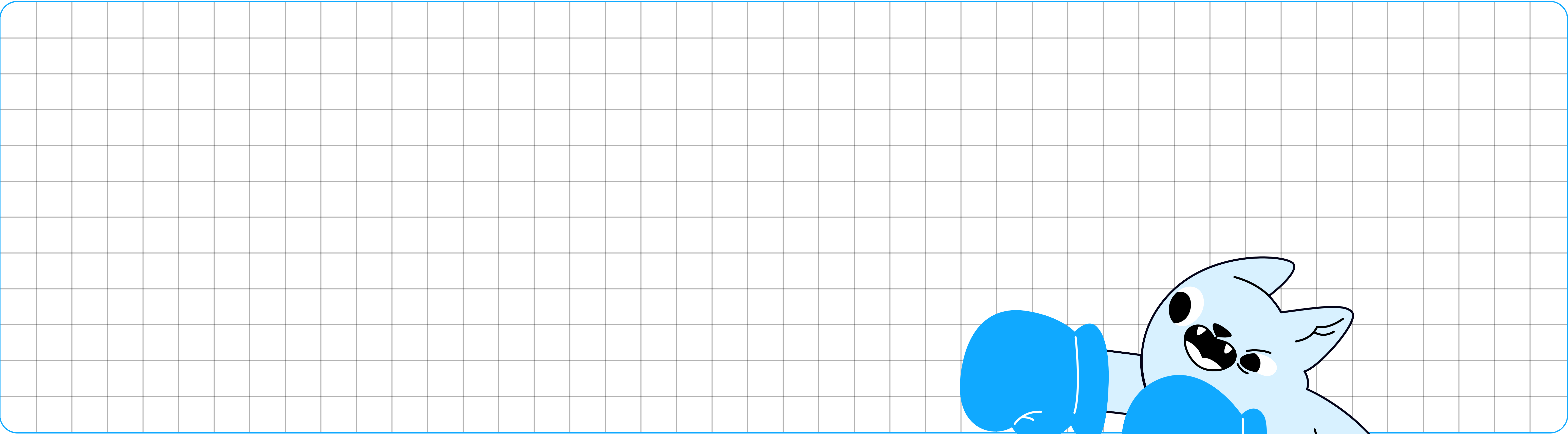
Прямая $y = m$, параллельная оси Ox , имеет с графиком:

- 0 общих точек при $m = 9$;
- 1 общую во всех остальных случаях.

Ответ: $m = 9$.



для заметок:



Источник: Открытый банк заданий ФИПИ

МАТЕМАТИКА С МАРИЕЙ СТРЕЛЬЦОВОЙ, TG: @OGEMATH100

